



Supratransmission et bistabilité nonlinéaire dans les milieux à bandes interdites photoniques et électroniques

D. Chevriaux

► To cite this version:

D. Chevriaux. Supratransmission et bistabilité nonlinéaire dans les milieux à bandes interdites photoniques et électroniques. Physique [physics]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2007. Français. NNT: . tel-00180987

HAL Id: tel-00180987

<https://theses.hal.science/tel-00180987>

Submitted on 22 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER II
— SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC —

THESE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER II

DISCIPLINE : Constituants élémentaires
ECOLE DOCTORALE : Information Structures Systèmes

**Supratransmission et bistabilité nonlinéaire dans les
milieux à bandes interdites
photoniques et électroniques**

présentée et soutenue publiquement
par

Dominique CHEVRIAUX

le 26 juin 2007 devant le jury composé de :

M. Antonio Degasperis	Professeur	Université de Rome	Rapporteur
M. Frédéric Geniet	Maître de Conférences	Université de Montpellier II	Examineur
M. Jérôme Leon	Professeur	Université de Montpellier II	Directeur de thèse
M. Miguel Manna	Professeur	Université de Montpellier II	Examineur
M. Michel Peyrard	Professeur	Ecole normale supérieur de Lyon	Examineur
M. Abdelmajid Taki	Professeur	Université de Lille	Rapporteur

Remerciements

Ces huit années passées au sein de l'Université Montpellier II ne me laissent que de bons souvenirs et quelques anecdotes. J'ai eu le plaisir de découvrir cet univers et d'aller jusqu'au bout, guidé par des personnes formidables.

Je retiendrais notamment les membres du Laboratoire de Physique Théorique et d'Astroparticules de l'Université Montpellier II que je remercie pour leur accueil. Je remercie Alain Falvard, directeur du laboratoire, pour l'attention qu'il porte envers les jeunes chercheurs, Sylviane Colaiocco, Aicha Halouani, Josette Cellier et Françoise Duceau pour leur gentillesse, ainsi que Michèle Bourgeat pour sa bonne humeur.

Je remercie également mes partenaires d'enseignements qui, durant ma période de monitorat, m'ont apporté leur aide et de précieux conseils, avec un soin tout particulier à Bertrand Plez pour sa disponibilité et à Jean-Louis Bantignies pour m'avoir fait confiance.

Je remercie, par ailleurs, un bon nombre de professeurs, dont j'ai admiré la rigueur, et avec qui j'ai suivi des enseignements passionnants, entre autres Gérard Cohen-Solal, Michel Diakonov, Vladimir Lorman, Maurizio Nobili, Henri Reboul, Philippe Tordjeman, et, bien que *non physicien*, Christophe Lung.

J'ai rencontré Jérôme Leon, pour la première fois, lors de ma recherche de stage de DEA. Je retiens de cette rencontre, une phrase qu'il a dite, je cite *Le stage de DEA est livré avec la thèse, mais je ne gâcherai pas la thèse*. J'espère avoir été à la hauteur de ses attentes. Pour ma part, j'ai énormément appris de Jérôme, tant sur le plan professionnel que sur le plan humain. Je le remercie pour toutes les compétences qu'il a su m'apporter, pour sa disponibilité permanente, pour son rôle de directeur de thèse qu'il a tenu à merveille en dirigeant mes recherches. Je le remercie également pour toute sa sympathie, pour son soutien, ainsi que pour m'avoir guidé du statut d'étudiant au statut de Docteur.

Je remercie Frédéric Geniet pour m'avoir fait découvrir l'industrie à travers le monde de la couleur. Je le remercie également pour ses conseils, sa sympathie, pour les nouvelles compétences qu'il a pu m'apporter, ainsi que pour sa confiance et sa grande sagesse !

Je remercie également tous les membres du jury et les rapporteurs Antonio Degasperis, Miguel Manna, Michel Peyrard et Abdelmajid Taki pour avoir accepté cette tâche et pour l'intérêt qu'ils portent à mon travail.

Je souhaite dire un grand merci à Ramaz Khomeriki pour notre collaboration, ainsi que pour son aide.

Je remercie ma femme pour son amour, sa présence et son soutien durant ces huit années d'études. Merci chérie d'avoir lu cette thèse et d'avoir mis à profit ton métier de professeur des écoles pour éradiquer certaines fautes de frappe dans ce manuscrit.

Papa, Maman, Julien, merci pour m'avoir toujours encouragé et montré le bon chemin. Merci d'avoir voulu le meilleur et surtout, je suis rempli de joie de voir votre fierté transparaître dans vos yeux.

Je remercie mes beaux parents pour leur dévouement et leurs encouragements.

Publications et conférences

Articles

- [1] Quantum Hall bilayer digital amplifier,
R. KHOMERIKI, J. LEON ET D. CHEVRIAUX,
The European Physical Journal B, **49**, 213-218 (2006).

- [2] Theory of a Josephson junction parrallel array detector sensitive to very weak signals,
D. CHEVRIAUX, R. KHOMERIKI ET J. LEON,
Physical Review B, **73**, 214516 (2006).

- [3] Bistable Transmitting Nonlinear Directional Couplers,
D. CHEVRIAUX, R. KHOMERIKI ET J. LEON,
Modern Physics Letters B, **20/10**, 515-532 (2006).

Actes de colloques

- [1] Transmission par bistabilité nonlinéaire,
D.CHEVRIAUX,
Proceeding Rencontre du Non-Linéaire 2006,
édité par M. Lefranc, C. Letellier et L. Pastur, Paris (France).

- [2] Bistability and supratransmission threshold in Josephson supperlattices,
D. CHEVRIAUX, R. KHOMERIKI ET J. LEON,
Proceeding 14th Nonlinear Dynamics of Electronic Systems 2006,
édité par P. Marquié, Dijon (France).

Conférences

- Mars 2006 : Rencontre du Non-Linéaire, communication orale Transmission par bistabilité nonlinéaire, organisé par l'Université Paris-Sud-Institut Poincaré, Paris (France).
- Juin 2006 : Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, communication orale Bistability and supratransmission threshold in Josephson superlattices, organisé par l'Université de Bourgogne, Dijon (France).

Séminaires

- Avril 2006 : Journées des doctorants, Bistabilité nonlinéaire, LPTA Université de Montpellier II (France).
- Mai 2006 : Modèles et Simulations en Physique de la Matière Condensée, Bistabilité nonlinéaire, Palavas (France).
- Janvier 2007 : Journées des doctorants, Du pot de yaourt à l'équation de transfert radiatif, LPTA et GRAAL Université de Montpellier II (France).

Table des matières

Introduction générale	11
I Le modèle sine-Gordon	15
1 Supratransmission dans l'équation de sine-Gordon	17
1.1 L'équation de sine-Gordon	17
1.1.1 La chaîne de pendules couplés	17
1.1.2 Modèle discret	17
1.1.3 Modèle continu	18
1.1.4 Limite linéaire et bande interdite	19
1.2 Supratransmission nonlinéaire	20
1.2.1 Introduction	20
1.2.2 Description du mode opératoire de supratransmission . . .	21
1.2.3 Simulations numériques et expérience du seuil de supra- transmission	21
1.2.4 Instabilité du profil d'ondes nonlinéaire évanescent	24
1.2.5 Conclusion	27
A Annexe : Solution Breather	29
B Annexe : Solution Kink	32
2 Bistabilité dans sine-Gordon	35
1 Introduction	35
2 Équation des fonctions elliptiques de Jacobi	35
3 Solutions stationnaires dans la chaîne de pendules	37
3.1 La chaîne de pendules courte	37
3.2 Expression générale	38
3.3 Solutions stationnaires	40
4 Comportement de bistabilité dans SG	42
4.1 Expériences numériques	42
4.2 Interprétation de la bistabilité	47
4.3 Expériences sur la chaîne de pendules courte	49

4.4	Détermination du seuil de supratransmission à partir des solutions analytiques	49
4.5	Limites	51
5	Bistabilité dans la bande passante	52
A	Annexe : Solutions stationnaires SG	55
A.1	Solution $u^{(I)}$: $\alpha > 0$ et $\Gamma > 0$	55
A.2	Solution $u^{(II)}$: $\alpha < 0$, $\Gamma < 0$ et $\Lambda B^4 > 1$	56
A.3	Solution $u^{(III)}$: $\alpha < 0$, $\Lambda B^4 < 1$ et $B^2 < 1$	58
A.4	Paramètre B_1	59
A.5	Paramètre B_0	60
3	Réseau de jonctions Josephson	63
1	Introduction	63
2	Réseau de jonctions Josephson	64
2.1	Introduction	64
2.2	Courant Josephson	64
2.3	Modèle SG	66
2.4	Réseau de jonctions couplées	67
3	Solutions	69
4	Boucle d'hystérésis	71
5	Amplificateur digital	73
5.1	Détecteur ultra-sensible	74
5.2	Amplificateur digital	75
6	Conclusion	77
A	Annexe : Densité de porteurs et potentiel	79
4	Amplificateur digital double couche à effet hall quantique	83
1	Introduction	83
2	Modèle	84
3	Détection de faibles signaux	85
4	Amplificateur digital	86
II	Le modèle Schrödinger nonlinéaire	89
1	Supratransmission dans les milieux à nonlinéarité Kerr	91
1	Milieu Kerr	91
2	Seuil de supratransmission dans l'équation de Schrödinger non-linéaire	93
2.1	Introduction	93
2.2	Instabilité du profil d'onde nonlinéaire	94

2	La bistabilité dans les réseaux de guides d'ondes nonlinéaires	99
1	Introduction	99
2	Réseau de guides d'ondes	101
2.1	Généralités	101
2.2	Modèle	101
3	Dispositif	103
3.1	Introduction	103
3.2	Modèle	103
3.3	Seuil de supratransmission	107
3.4	Détecteur de lumière bistable	107
4	Les états stationnaires	110
5	Conclusion	112
A	Annexe A : Solutions stationnaires NLS	113
3	Transmission par bistabilité nonlinéaire	119
1	Introduction	119
2	Le modèle	120
2.1	Considérations générales	120
2.2	Modulation nonlinéaire	120
3	Solutions fondamentales	122
3.1	Problèmes aux valeurs propres	122
4	États propres nonlinéaires	124
5	Simulations numériques	126
6	Conclusion	128
A	Annexe A : Modulation nonlinéaire	132

Introduction générale

Bien que les phénomènes non-linéaires suscitent beaucoup d'intérêt depuis l'observation d'une onde solitaire en 1834 par John Scott Russell [1], la non-linéarité a souvent été écartée et traitée comme une perturbation de la linéarité. Pourtant, le non-linéaire est aujourd'hui quelque chose d'essentiel en physique, riche de particularités et de propriétés propres à lui-même. Pour ces raisons, et parce que le terme *non* entraîne une connotation négative, on prendra la liberté d'écrire dans ce manuscrit, *nonlinéaire*, et non pas, *non-linéaire*.

Cette thèse procède par l'étude des propriétés d'équations nonlinéaires, telle que l'équation de sine-Gordon et l'équation de Schrödinger nonlinéaire, pour les confronter à des dispositifs physiques réels.

Une première propriété est la supratransmission nonlinéaire [2] qui montre l'existence d'un seuil au-delà duquel un soliton est émis, et se propage dans un milieu nonlinéaire. Ce processus est obtenu en forçant l'équation d'onde à une extrémité dans la bande interdite, et il résulte d'une instabilité fondamentale du profil d'ondes évanescents générés dans le milieu par l'onde incidente [3].

Une autre propriété est l'existence d'un comportement de bistabilité nonlinéaire générant un phénomène d'hystérésis. Il faut comprendre par bistabilité, le fait qu'il existe deux états stationnaires stables, qui sont complètement liés au caractère de la supratransmission, puisque le passage d'un état dit *évanescents*, à un état dit *stationnaire de grandes amplitudes* par abus de langage, se fait par le biais du seuil de supratransmission nonlinéaire.

Cette thèse est divisée en deux parties, dont la première sera consacrée à l'équation nonlinéaire de référence, à savoir l'équation de sine-Gordon (*SG*) et une seconde, où il sera question de l'équation de Schrödinger nonlinéaire (*NLS*).

La première partie traite, tout d'abord, de la supratransmission dans *SG* à travers l'exemple de la chaîne de pendules nonlinéaire. C'est un exemple simple de système nonlinéaire possédant une bande interdite *mécanique*. La supratransmission consiste ici à forcer le premier pendule de la chaîne, avec une fréquence prise dans la bande interdite, et d'observer pour quelle valeur d'angle du pendule, par rapport à sa position d'équilibre, un soliton est émis dans la chaîne. On établira en fonction de la fréquence de forçage, le seuil de supratransmission, à l'aide de simulations numériques d'une perturbation linéaire de *SG*.

Ensuite, on étudiera les propriétés de bistabilité de *SG* et on montrera son exis-

tence par des expériences réalisées sur une chaîne de pendules courte (moins de 10 pendules). On apportera une description analytique complète du phénomène de bistabilité observé dans la chaîne de pendules courte [4]. On verra en particulier, la possibilité, pour une même fréquence et une même amplitude de forçage du premier pendule, d'obtenir deux comportements tout à fait différents pour l'ensemble de la chaîne. Le premier sera l'équivalent d'une onde évanescence dans la chaîne de pendules, alors que le second sera une onde stationnaire de très grande amplitude.

On appliquera ensuite la bistabilité à un réseau de jonctions Josephson courtes dans le but de concevoir un détecteur ultra-sensible. Le principe est d'utiliser la possibilité du système de bifurquer d'un état de faible intensité de sortie du réseau vers un état intense, et vice-versa, grâce aux propriétés d'hystérésis de la bistabilité. On donnera même, grâce à la connaissance des solutions analytiques stationnaires de bistabilité, le seuil pour lequel ce dispositif fonctionne en détecteur ultra-sensible [5]. On montrera, de plus, que ce système peut se comporter comme un amplificateur digital, si l'on prend soin de moduler convenablement le courant *source*, c'est-à-dire le courant alimentant le réseau.

Enfin, on démontrera la possibilité d'utiliser les systèmes à double couches à effet Hall quantique pour réaliser un amplificateur digital sans recours à la supraconductivité, à la différence des jonctions Josephson.

La seconde partie débutera par une brève introduction à la nonlinéarité Kerr, que l'on appliquera par la suite aux milieux d'indices périodiques. Une onde se propageant suivant la direction de variation de l'indice (milieux de Bragg) sera décrite par les modes couplés, tandis qu'une onde se propageant suivant la direction transverse de variation de l'indice sera décrite par NLS. On se limitera ici à l'étude de la supratransmission nonlinéaire dans les milieux Kerr, lorsque l'onde incidente se propage suivant la direction de variation transverse de l'indice.

On établira ensuite le modèle NLS discret décrivant les réseaux de guides d'ondes nonlinéaires afin de concevoir un détecteur de lumière bistable [6]. Le principe est l'utilisation d'un réseau de guides d'ondes d'indice n_1 fonctionnant en régime nonlinéaire Kerr, couplé à deux guides d'ondes maîtres d'indice $n_0 > n_1$. La différence d'indices entraîne l'existence d'une bande interdite photonique. Le forçage avec une fréquence prise dans le gap, exercé par les guides d'ondes maîtres latéraux sur le réseau, entraîne, pour une amplitude suffisante, un siphonnage de l'énergie par le réseau, envoyée sous forme lumineuse, dans les guides d'ondes maîtres. On montrera alors qu'il existe la possibilité, pour ce réseau, de propager ou non une onde stationnaire grâce aux propriétés de bistabilité.

Pour finir, on établira, un modèle continu sous la forme de NLS, permettant de décrire tous types de milieux à nonlinéarité Kerr, dans lesquels la lumière suit une direction de propagation transverse à la direction de variation de l'indice [7]. Ceci, sera donc appliqué au cas d'un coupleur directionnel composé de trois fibres, qui est en fait la réduction du réseau précédent à une seule fibre. Le but est d'explorer les effets de diffraction transverse grâce à un modèle continu, et de regarder

la possibilité pour ce genre de dispositif d'ouvrir la voie vers la réalisation de composants optiques copiant les composants électroniques. En effet, la conception de dispositifs ultra-sensibles à la lumière permet d'envisager la fabrication de détecteurs de lumière, de switches, de portes logiques ou bien même de transistors optiques.

Bibliographie

- [1] J.S. RUSSELL, *Report on waves*, **Londres**, 311-390 (1844).
- [2] F. GENIET ET J. LEON, *Phys Rev Lett*, **89**, 134102 (2002); *J Phys Cond Matt*, **15**, 2933 (2003).
- [3] J. LEON, *Phys Lett A*, **319**, 130-136 (2003).
- [4] R. KHOMERIKI, J. LEON ET D. CHEVRIAUX, *The European Physical Journal B*, **49**, 213-218 (2006).
- [5] D. CHEVRIAUX, R. KHOMERIKI ET J. LEON, *Physical Review B*, **73**, 214516 (2006).
- [6] R. KHOMERIKI ET J. LEON, *Phys Rev Lett*, **94**, 243902 (2005).
- [7] D.CHEVRIAUX, R. KHOMERIKI ET J. LEON, *Modern Physics Letters B*, **20/10**, 515-532 (2006).

Première partie

Le modèle sine-Gordon

Chapitre 1

Supratransmission dans l'équation de sine-Gordon

Le but de ce chapitre est d'amener les concepts de base de la supratransmission nonlinéaire, dans les milieux régis par l'équation de sine-Gordon (SG). A travers l'exemple simple de la chaîne de pendules, on verra la réalisation expérimentale de ce phénomène. On expliquera par la suite ce processus, à l'aide de simulations numériques montrant le critère d'instabilité dans SG.

1.1 L'équation de sine-Gordon

1.1.1 La chaîne de pendules couplés

On considère la chaîne de pendules couplés linéairement de la figure (1.1) construite suivant [1, 2]. Tous les pendules sont quasi-identiques de masse m et libres de rotation autour d'un axe commun et on note ω_0 leur fréquence propre. Deux pendules voisins sont couplés linéairement entre eux par une force de rappel, matérialisée par un ressort, donnant lieu à la fréquence ω_1 .

1.1.2 Modèle discret

Le Lagrangien du système est donné par la somme sur toutes les mailles de la chaîne, de la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de chaque pendule

$$\mathcal{L} = \sum_{n=1}^N \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}_n^2 - \frac{m\omega_1^2 l^2}{2} (\theta_n - \theta_{n-1})^2 - m\omega_0^2 l^2 (1 - \cos \theta_n), \quad (1.1)$$

où θ_i est l'écart angulaire du pendule i par rapport à sa position d'équilibre, et l est la distance entre l'axe de rotation et le centre de gravité du pendule. Le point au-dessus $\dot{\theta}$ désignera de manière standard la dérivée par rapport au temps.

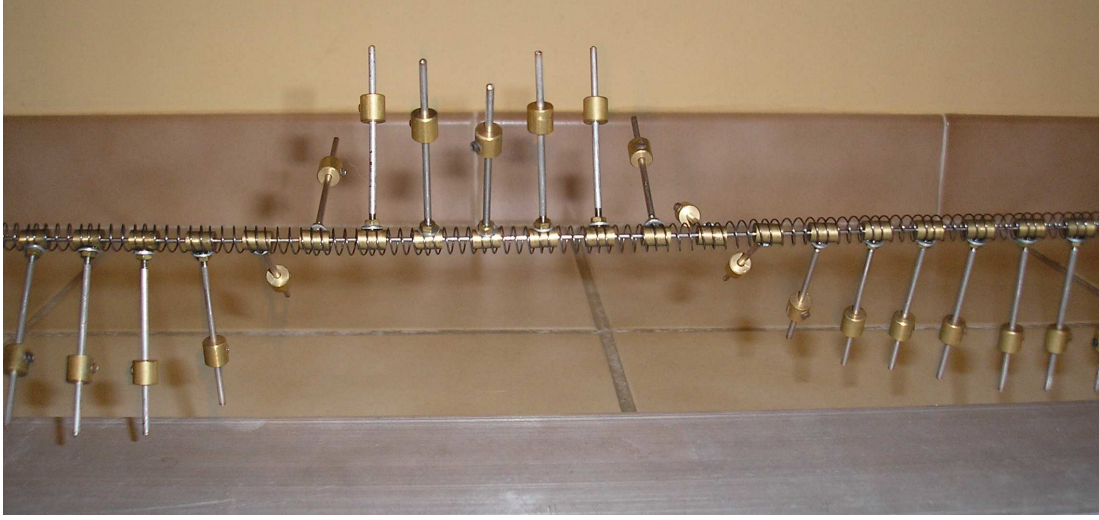


FIG. 1.1 – Photo d'un Breather en mouvement dans la chaîne de pendules.

La première contribution de l'équation (1.1) correspond à l'énergie cinétique de rotation des pendules. Le second terme représente l'énergie de couplage élastique entre deux pendules voisins. Enfin, le dernier terme décrit l'énergie potentielle de pesanteur d'un pendule et introduit l'aspect nonlinéaire.

L'introduction des moments conjugués p_i des coordonnées $q_i = l\theta_i$ définis par les relations

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} = ml\dot{\theta}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.2)$$

et l'utilisation des équations d'Euler-Lagrange

$$\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \Rightarrow ml\ddot{\theta}_i = m\omega_1^2 l (\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) - m\omega_0^2 l, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.3)$$

conduisent aux équations différentielles nonlinéaires couplées suivantes

$$\ddot{\theta}_n - \omega_1^2 (\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1}) + \omega_0^2 \sin \theta_n = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (1.4)$$

1.1.3 Modèle continu

Bien qu'aucune solution de l'équation (1.4) ne soit connue, il est possible d'obtenir une solution approchée grâce à l'approximation des milieux continus, c'est-à-dire quand le caractère discret de la chaîne est pratiquement inaperçu par l'onde. Elle est valable dans le cas d'un couplage fort, où la variable θ varie peu d'un pendule à l'autre $|\theta_{n+1} - \theta_n| \ll |\theta_n|$. On note d la distance entre les pendules et on remplace la variable discrète $\theta_n(t)$ par le champ $u(x, t)$ où $x = nd$. On utilise le développement de Taylor autour du point $x = nd$

$$\begin{aligned}\theta_{n\pm 1}(t) = u(x \pm d, t) = u(x, t) &\pm d \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \\ &\pm \frac{d^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, t) + \mathcal{O}(d^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t)).\end{aligned}\quad (1.5)$$

Ainsi, l'on a, après simplification

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} \simeq d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \mathcal{O}(d^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t)), \quad (1.6)$$

et l'on obtient en remplaçant (1.6) dans (1.4), l'équation de sine-Gordon (SG), à savoir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin u = 0, \quad (1.7)$$

où $c = \omega_1 d$.

1.1.4 Limite linéaire et bande interdite

Considérons le cas des faibles amplitudes, c'est-à-dire $\theta \ll 2\pi$. En prenant la limite linéaire du terme sinusoïdal, l'équation (1.4) devient

$$\ddot{\theta}_n - \omega_1^2(\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1}) + \omega_0^2 \theta_n = 0. \quad (1.8)$$

Elle admet des solutions du type $\theta_n(t) = \theta_0 e^{i(knd - \omega t)} + c.c$ dans lesquelles la pulsation ω et le vecteur d'onde k à une dimension, sont reliés par la relation de dispersion

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\omega_1^2(1 - \cos kd), \quad (1.9)$$

représentée sur la figure (1.2). Cette relation de dispersion montre que les pulsations ω inférieures à la pulsation propre ω_0 d'un pendule, correspondent à des vecteurs d'ondes k imaginaires, c'est-à-dire des ondes atténuées exponentiellement. Autrement dit, les ondes ne se propagent pas dans la chaîne de pendule, c'est une bande interdite (ou gap de fréquence) pour laquelle le milieu est non passant. Soit $k = i\lambda$, la relation de dispersion devient

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\omega_1^2(\cosh \lambda d - 1) \leq \omega_0^2, \quad (1.10)$$

d'où l'on peut extraire

$$\lambda = \frac{1}{d} \operatorname{arccosh} \left[1 + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega_1^2} \right]. \quad (1.11)$$

Si l'on considère le cas des milieux continus, la limite linéaire du terme sinusoïdal de l'équation SG (1.7) conduit à l'équation de Klein-Gordon à une dimension, soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega_0^2 u = 0. \quad (1.12)$$

Elle admet des solutions en ondes planes du type $u_n(t) = u_0 e^{i(kx - \omega t)} + c.c$ dans lesquelles la pulsation ω et le vecteur d'onde k à une dimension, sont reliés par la relation de dispersion

$$\omega^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2, \quad (1.13)$$

représentée sur la figure (1.2). De même que précédemment, il existe une bande interdite pour des fréquences inférieures à ω_0 .

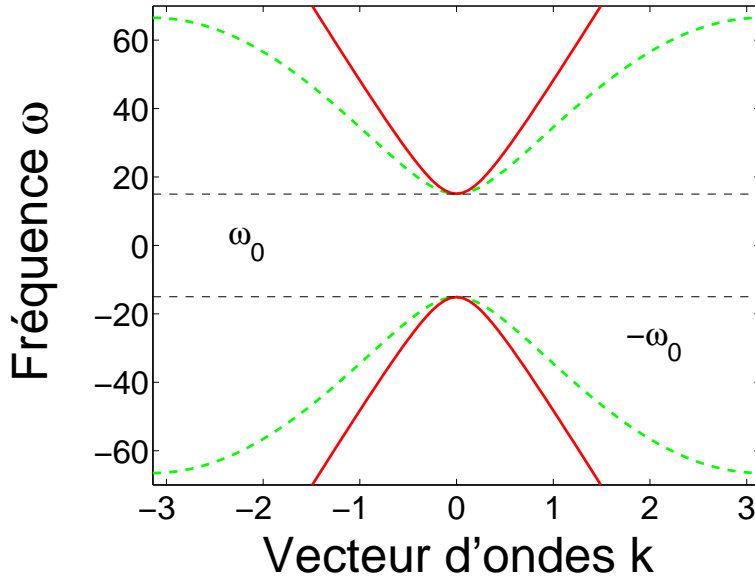


FIG. 1.2 – La courbe en rouge représente la relation de dispersion linéaire $w(k)$ du modèle continu (1.13) et la courbe verte en traits discontinus représente la relation de dispersion du modèle discret (1.10). Il existe un gap de fréquence pour toutes fréquences $|\omega| < \omega_0$.

1.2 Supratransmission nonlinéaire

1.2.1 Introduction

La supratransmission nonlinéaire [3] est la propriété que peut développer un système nonlinéaire possédant une bande interdite naturelle. Elle consiste à transmettre l'énergie d'un signal, dont la fréquence est prise dans le gap, grâce à la génération de modes nonlinéaires, encore appelés solitons de gap. Ce processus

est décrit comme le résultat d'une instabilité du profil d'ondes évanescent généré dans le milieu nonlinéaire par le signal incident [4].

1.2.2 Description du mode opératoire de supratransmission

Pour mener l'expérience de supratransmission, on dispose d'une chaîne de pendules dont le premier pendule est asservi par un moteur dont on contrôle parfaitement l'amplitude et la fréquence. D'un point de vue plus théorique, on crée aux bords du milieu décrit par SG, une excitation stationnaire périodique et on regarde la réponse de ce milieu. C'est un problème d'équation d'onde sur la ligne semi-infinie $n > 0$ avec les conditions de bords suivantes : la donnée de l'amplitude et de la fréquence de forçage $\theta_0(t) = A \cos(\Omega t)$ et une extrémité libre en bout de chaîne $\theta_N(t) = \theta_{N+1}(t)$. Dans le cas où l'on force la chaîne avec une fréquence prise dans la bande passante $\Omega > \omega_0$, l'onde pénètre le milieu avec une fréquence ω égale à la fréquence de forçage Ω . L'effet de la nonlinéarité est alors une modulation du train d'ondes. Par contre, si l'on excite le milieu avec une fréquence prise dans la bande interdite $\Omega < \omega_0$, le milieu est réfléchissant et on observe une onde évanescente dans la chaîne. Si le milieu était linéaire, l'onde produite aurait le profil évanescent suivant

$$\theta_n(t) = A \sin(\Omega t) \exp(-\lambda n d), \quad (1.14)$$

où λ est défini en (1.11) et d est la distance inter-pendules.

L'expérience de supratransmission consiste à augmenter progressivement l'amplitude jusqu'à l'émission d'un Breather comme on peut le voir sur la figure (1.1). Avant l'émission, le milieu ajuste un profil *évanescent nonlinéaire* qui est la queue d'un Breather statique

$$\theta_b(t) = 4 \arctan \left[\frac{\lambda \omega_1 \sin(\Omega t)}{\Omega \cosh[\lambda(n + n_0)d]} \right]. \quad (1.15)$$

C'est une solution qui n'est exacte que dans la limite continue comme on le démontre en annexe (p.29). Le paramètre n_0 permet d'ajuster le centre du Breather. En fait, pour toutes valeurs de $n_0 < 0$, le milieu n'émet pas de soliton, mais pour $n_0 \geq 0$, on a une instabilité générique du profil évanescent qui déclenche l'émission d'un soliton.

1.2.3 Simulations numériques et expérience du seuil de supratransmission

Avant de recourir à une étude du critère d'instabilité décrivant le phénomène de supratransmission, on effectue un calcul *brutal* du seuil de supratransmission.

Autrement dit, on cherche une solution de l'équation SG discrète sous forme d'ondes planes

$$\theta_n(n, t) = \sqrt{3}Ae^{i(knd - \Omega t)}. \quad (1.16)$$

On effectue un développement limité du sinus dans SG en ne gardant que le premier terme nonlinéaire

$$\theta_{tt}(x, t) - \omega_1^2(\theta_{n+1}(x, t) - 2\theta_n(x, t) + \theta_{n-1}(x, t)) + \omega_0^2\theta(x, t) - \omega_0^2\frac{\theta^3(x, t)}{6}. \quad (1.17)$$

On introduit (1.16) dans (1.17)

$$-\Omega^2 - 2\omega_1^2(\cos(kd) - 1) + \omega_0^2 - \omega_0^2\frac{A^2}{2} = 0. \quad (1.18)$$

La première onde qui se propage intervient pour $k = 0$, et on obtient le seuil

$$A_s = \sqrt{2 \left(\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\omega_0^2} \right)}. \quad (1.19)$$

Il faut noter que l'on trouve exactement le même résultat si l'on calcule le seuil A_s à partir de SG continue.

On réalise des simulations numériques de SG discrète avec les conditions initiales

$$\theta_0(t) = A \sin(\Omega t), \quad \theta_n(0) = 0, \quad \dot{\theta}_n(0) = A\Omega e^{-\lambda n}. \quad (1.20)$$

Ces conditions imposent un forçage périodique du pendule virtuel $n = 0$, où la chaîne est initialement au repos. Les conditions initiales de vitesse de la chaîne sont imposées afin de ne pas brusquer le système, c'est une façon d'établir l'expérience de façon adiabatique.

Afin de pouvoir comparer les résultats des expériences aux simulations numériques, on doit déterminer les paramètres physiques de la chaîne, à savoir la fréquence propre ω_0 et le couplage entre pendules ω_1 , à partir de la relation de dispersion (1.9). Le principe est de forcer la chaîne de pendules à faible amplitude, avec une fréquence prise dans la bande de phonons $\Omega > \omega_0$, puis de mesurer le nombre d'ondes k en comptant le nombre de pendules constituant une longueur d'onde. On a obtenu

$$\omega_0 = 15.1\text{Hz}, \quad \omega_1 = 32.4\text{Hz}. \quad (1.21)$$

La figure (1.3) présente le résultat de simulations numériques de l'équation SG discrète avec les conditions initiales (1.20) et le résultat de véritables expériences sur la chaîne de pendules.

On a tracé le seuil de supratransmission en fonction de la fréquence de forçage Ω . La première remarque que l'on peut faire est que les simulations, ainsi que les expériences, sont en désaccord avec le seuil A_s calculé précédemment (1.19). On

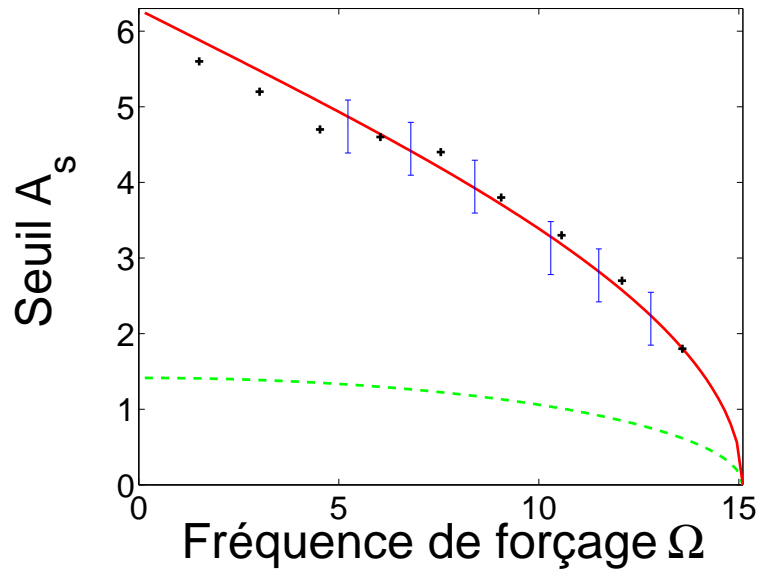


FIG. 1.3 – Tracé de l'amplitude de supratransmission A_s en fonction de la fréquence de forçage Ω . Les croix noires représentent le résultat de simulations numériques de l'équation (1.4) avec les conditions initiales (1.20). Les barres d'erreurs en bleu sont le résultat d'expériences sur la chaîne de pendules. La courbe discontinue en vert représente le seuil obtenu en (1.19). La courbe en rouge représente le véritable seuil donné en (1.30).

a donc utilisé une mauvaise approche. Le seuil de supratransmission se situe plus haut, c'est-à-dire que le système nécessite plus d'énergie pour émettre un soliton. En second lieu, on peut remarquer que pour une fréquence de forçage tendant vers 0, l'amplitude seuil est de 2π , ce qui semble tout à fait raisonnable. En effet, on conçoit assez facilement, sans faire l'expérience, qu'un soliton est émis quand le premier pendule a fait un tour complet et ce, avec un temps infini ($\Omega = 0$).

1.2.4 Instabilité du profil d'ondes nonlinéaire évanescent

On écarte désormais le modèle SG discret pour se consacrer au modèle SG continu, sachant que les résultats seront valables pour un fort couplage dans le cas discret.

On souhaite montrer l'existence d'une instabilité dans l'équation de SG

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin u = 0, \quad (1.22)$$

avec un forçage périodique en $x = 0$ et des conditions de bords libres en $x = L$

$$u(0, t) = A \cos(\Omega t), \quad u_x(L, t) = 0, \quad (1.23)$$

où $0 < \Omega < \omega_0$ est la fréquence de forçage prise dans la bande interdite.

Il est tout d'abord essentiel de comprendre que les conditions de forçage aux bords, génèrent dans le milieu, une onde évanescence déformée par la nonlinéarité. Les simulations numériques de (1.22) avec les conditions de bords (1.23) sur la figure (1.4), le montrent d'ailleurs très bien.

C'est encore plus spectaculaire lors d'expériences sur la chaîne de pendules où l'on voit la déformation de plus en plus prononcée au fur et à mesure que l'on augmente l'amplitude de forçage comme le montre les figures (1.5).

Dans le cas où l'on force SG avec des conditions de bords périodiques, la solution induite par les valeurs de l'amplitude au bord est le Breather statique

$$u_b(x, t) = 4 \arctan \left[\frac{\lambda c \cos(\Omega t)}{\Omega \cosh[\lambda(x - x_0)]} \right]. \quad (1.24)$$

où x_0 est le centre du Breather. On veut montrer que le seuil de supratransmission est donné pour chaque valeur de Ω par le maximum de l'amplitude de $u_b(x, t)$.

Afin d'observer les effets du forçage, on étudie la perturbation de la solution exacte de SG $u_b(x, t)$, soit

$$u(x, t) = u_b(x, t) + \epsilon \eta(x, t), \quad \epsilon \ll 1. \quad (1.25)$$

On substitue (1.25) dans (1.22), il vient à l'ordre ϵ

$$\eta_{tt} - c^2 \eta_{xx} + \omega_0^2 \eta V = 0, \quad (1.26)$$

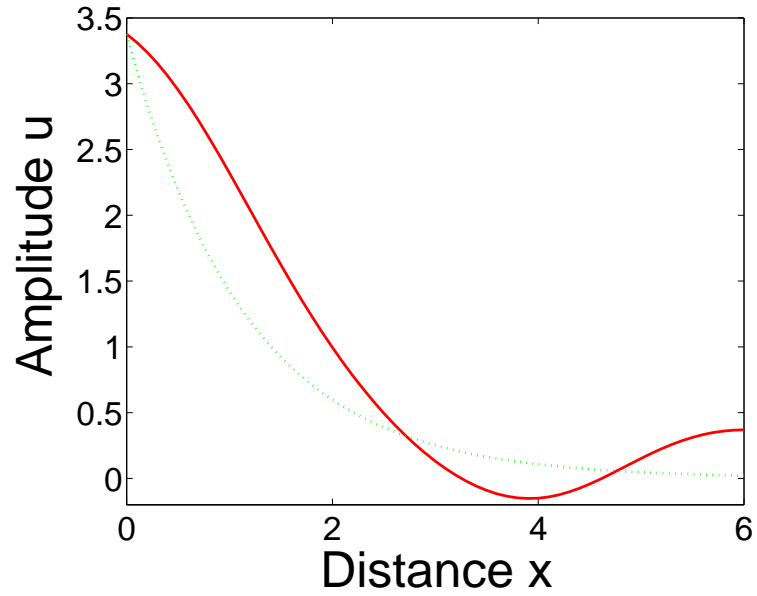


FIG. 1.4 – Résultats de simulations numériques, où l'on a tracé en rouge l'écart angulaire $u(x, t)$ en fonction de x , comparé à l'écart angulaire en vert pointillé dans le cas où le milieu serait linéaire (équation Klein-Gordon). Les deux courbes sont obtenues avec les paramètres $t = 15.5$, $\Omega = 0.5$, $c = 1$, $A = 4.1$.

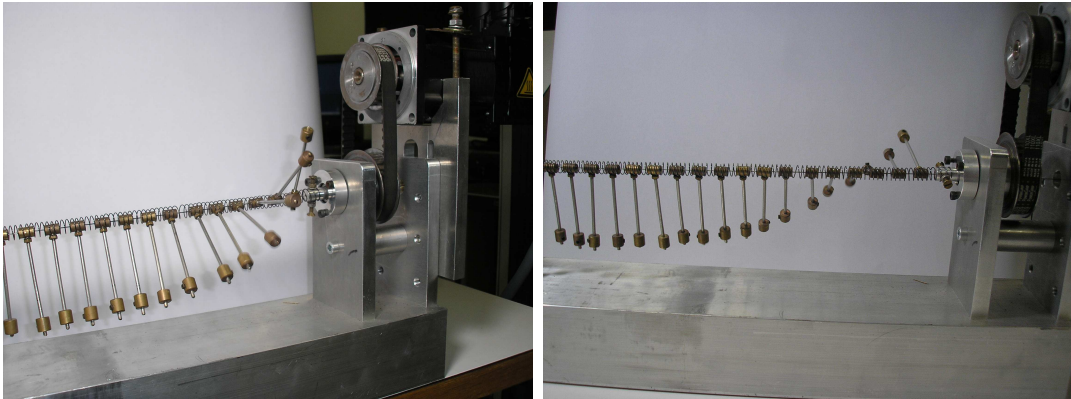


FIG. 1.5 – Photos de la chaîne de pendules pour deux amplitudes de forçage différentes.

où l'on a utilisé un développement de Taylor de $\sin(u_b + \epsilon\eta) \approx \sin u_b + \eta \cos u_b$ et où $V = \cos u_b$. Sachant

$$\cos[4 \arctan(f)] = 1 - \frac{8f^2}{(1+f^2)^2}, \quad (1.27)$$

on peut alors écrire

$$V(x, t) = 1 - 8 \frac{\lambda^2 c^2 \cos^2(\Omega t)}{\Omega^2 \cosh[\lambda(x - x_0)]} \left[1 + \frac{\lambda^2 c^2 \cos^2(\Omega t)}{\Omega^2 \cosh[\lambda(x - x_0)]} \right]^{-2}. \quad (1.28)$$

Le maximum du Breather (1.24), donnant le seuil de supratransmission A_s , est obtenu pour la valeur maximum de $\cos(\Omega t)$, et le minimum de $\cosh(\lambda(x - x_0))$, soit en $t = 2p\pi/\Omega$ et si $x_0 = 0$ en $x = 0$. On a donc

$$A_s = 4 \arctan \left[\frac{\lambda c}{\Omega} \right]. \quad (1.29)$$

La relation de dispersion linéaire, $\Omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 c^2$ (cf p.29) et (1.29) donne le seuil de supratransmission nonlinéaire en fonction de la fréquence de forçage Ω et de la fréquence propre ω_0

$$A_s = 4 \arctan \left[\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2}}{\Omega} \right]. \quad (1.30)$$

On doit maintenant montrer, que l'existence du seuil A_s est bien le résultat d'une instabilité du profil d'onde évanescent pour une amplitude de forçage A_s . Pour cela, on suppose que le profil d'onde évanescent nonlinéaire u_e généré dans le milieu a la forme

$$u_e(x, t) = 4 \arctan \left[\frac{B \cos(\Omega t)}{\cosh(\lambda X)} \right], \quad (1.31)$$

où B est l'amplitude permettant de rattacher l'onde aux conditions de forçage. On suppose que le potentiel $V(x)$ est obtenu à partir du profil évanescent en considérant son extremum sur une période

$$V(x) = \max_t V[u_e(x, t)]. \quad (1.32)$$

(1.31) et (1.32) donnent alors le potentiel

$$V(x) = 1 - 8 \frac{B^2}{\cosh(kx)} \left[1 + \frac{B^2}{\cosh(kx)} \right]^{-2}. \quad (1.33)$$

On effectue maintenant des simulations numériques de (1.26) avec notre nouveau potentiel (1.33). On donne comme condition initiale une petite perturbation de u_b , c'est-à-dire $\eta(x, 0) = 0.01$ avec les conditions de bords $\eta(0, t) = \eta(L, t) =$

0.01 et $\eta_t(x, 0) = 0$. On augmente ensuite progressivement l'amplitude B . En comparant (1.28) avec (1.33) et en considérant (1.32), on voit que l'instabilité doit se produire pour

$$B = \frac{\lambda c}{\Omega}. \quad (1.34)$$

Tant que l'amplitude B est inférieure au seuil, on observe de petites oscillations de η autour de sa valeur initiale. Par contre, lorsque l'on se rapproche du seuil, on observe des oscillations qui grandissent exponentiellement. La figure (1.6) montre le résultat de ces simulations numériques où l'on a tracé, en fonction de la fréquence de forçage Ω , les valeurs de B pour lesquelles η démarre sa croissance exponentielle.

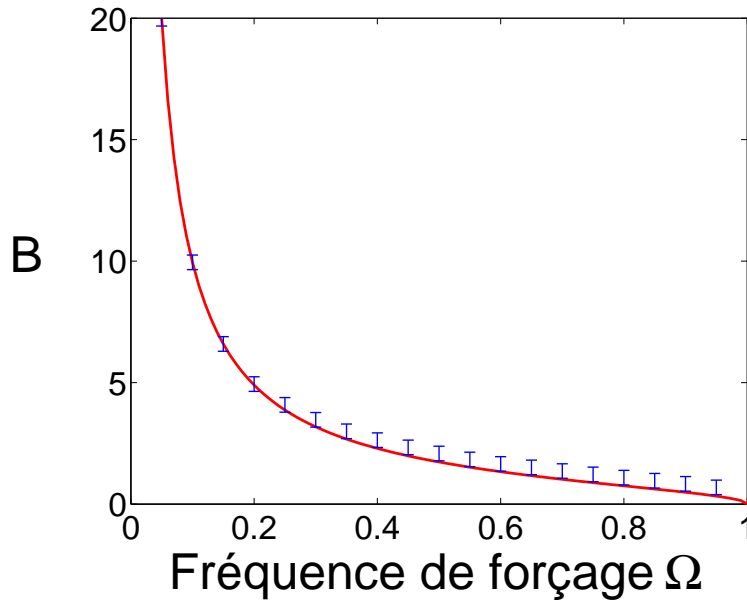


FIG. 1.6 – Les barres d'erreur en bleu donnent le critère d'instabilité B , obtenu par simulations numériques de (1.25) avec le potentiel (1.33). Il est difficile de juger à partir de quand précisément, η croît exponentiellement, on a donc une erreur sur B d'environ 0.3 . La courbe rouge est la prédiction faite en (1.33). Les paramètres utilisés sont $L = 10$, $\Omega_0 = 1$ et $c = 1$.

1.2.5 Conclusion

Les simulations sont en très bon accord avec les prédictions. On a donc une description du phénomène de supratransmission nonlinéaire. Elle résulte de l'instabilité du profil d'onde évanescent dans un milieu nonlinéaire, générée par le forçage périodique des conditions de bords, avec une fréquence prise dans le gap.

On a désormais une expression analytique du seuil d'amplitude générant une supratransmission nonlinéaire dans le cas SG continu

$$A_s = 4 \arctan \left[\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2}}{\Omega} \right]. \quad (1.35)$$

Il faut noter que pour l'équation de SG normalisée

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0, \quad (1.36)$$

obtenue par la transformation $t = \omega_0 t'$ et $x = \frac{\omega_0}{c}$ en omettant les primes, à partir de (1.20), le seuil de supratransmission vaut

$$A_s = 4 \arctan \left[\frac{\sqrt{1 - \Omega^2}}{\Omega} \right]. \quad (1.37)$$

On peut d'ailleurs obtenir simplement (1.37) en posant $\omega_0 = 1$ ($\Omega/\omega_0 \rightsquigarrow \Omega$ avec $0 \leq \Omega \leq 1$) dans (1.35).

Le seuil de supratransmission s'exprime, tout simplement, comme étant le maximum de la solution soliton. Si l'on applique cette règle à l'équation SG discrète (1.37) qui modélise la chaîne de pendules, le seuil est obtenu pour le maximum de la solution Breather (1.15), soit

$$A_s = 4 \arctan \left[\frac{\omega_1}{d\Omega} \arccos \left(1 + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega_1^2} \right) \right]. \quad (1.38)$$

Le seuil de supratransmission (1.35) obtenu de SG continu est alors une bonne approximation du seuil donné en (1.38) dans le cas où le couplage entre pendules est suffisamment fort.

A Annexe : Solution Breather

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin u = 0. \quad (1)$$

Depuis la solution Kink (34), on peut supposer [5] que l'équation (1) admet des solutions de la forme

$$u = 4 \arctan \frac{F(x)}{G(t)}, \quad (2)$$

où F et G sont des fonctions arbitraires. On écrit (2) sous la forme

$$\tan(u/4) = \frac{F(x)}{G(t)}. \quad (3)$$

On rappelle l'identité

$$\sin u = 4 \tan(u/4) \frac{1 - \tan^2(u/4)}{(1 + \tan^2(u/4))^2} = 4 \frac{F(x)}{G(t)} \frac{1 - \frac{F^2(x)}{G^2(t)}}{\left(1 + \frac{F^2(x)}{G^2(t)}\right)^2}. \quad (4)$$

Après substitution de (2) et (4) dans (1), il vient

$$(G^2 + F^2) \left(c^2 \frac{F_{xx}}{F} + \frac{G_{tt}}{G} \right) - 2((cF_x)^2 + (G_t)^2) + \omega_0^2(F^2 - G^2) = 0. \quad (5)$$

On dérive successivement par x et t

$$c^2 G^2 \left(\frac{F_{xx}}{F} \right)_x + c^2 (F F_{xx})_x + (F^2)_x \frac{G_{tt}}{G} - (2(cF_x)^2 - \omega_0^2 F^2)_x = 0, \quad (6)$$

$$c^2 (G^2)_t \left(\frac{F_{xx}}{F} \right)_x + (F^2)_x \left(\frac{G_{tt}}{G} \right)_t = 0. \quad (7)$$

La séparation de variables de (7) donne

$$\frac{1}{(F^2)_x} \left(\frac{F_{xx}}{F} \right)_x = - \frac{1}{c^2 (G^2)_t} \left(\frac{G_{tt}}{G} \right)_t = A, \quad (8)$$

où A est une constante. On intègre (8)

$$F_{xx} = AF^3 + B_1 F, \quad (9)$$

$$G_{tt} = -Ac^2 G^3 + B_2 G, \quad (10)$$

où B_1 et B_2 sont des constantes. On multiplie respectivement (9) et (10) par $2F_x$ et $2G_t$, et après intégration l'on obtient

$$(F_x)^2 = \frac{A}{2}F^4 + B_1F^2 + C_1, \quad (11)$$

$$(G_t)^2 = \frac{Ac^2}{2}G^4 + B_2G^2 + C_2, \quad (12)$$

où C_1 et C_2 sont deux nouvelles constantes d'intégration. La substitution de (9),(10),(11) et (12) dans (5) impose

$$c^2B_1 - B_2 = \omega_0^2, \quad c^2C_1 + C_2 = 0. \quad (13)$$

On introduit la relation de dispersion linéaire $\Omega^2 = \omega_0^2 - c^2\lambda^2$, et on pose

$$\frac{A}{2} = -q^2, \quad B_1 = \lambda^2, \quad (14)$$

il vient

$$(F_x)^2 = -q^2F^4 + \lambda^2F^2 + C_1, \quad (15)$$

$$(G_t)^2 = q^2c^2G^4 - \Omega^2G^2 - c^2C_1. \quad (16)$$

On étudie le cas particulier $C_1 = 0$. (15) et (16) deviennent alors

$$\frac{dF}{\sqrt{F^2(\lambda^2 - q^2F^2)}} = \pm dX, \quad (17)$$

$$\frac{dG}{\sqrt{G^2(q^2c^2G^2 - \Omega^2)}} = \pm dT. \quad (18)$$

Or d'après les tables [6], on a

$$\left[\frac{1}{\cosh} \right]^{-1}(y) = \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2(1-t^2)}}, \quad (19)$$

$$\left[\frac{1}{\cos} \right]^{-1}(y) = \int_1^y \frac{dt}{\sqrt{t^2(t^2-1)}}, \quad (20)$$

où $[\dots]^{-1}$ désigne la fonction inverse. On pose $f = \frac{q}{\lambda}F$ et $g = \frac{qc}{\Omega}G$ puis on intègre (17) qui devient

$$\int_{f(X)}^{f(0)=1} \frac{df}{\sqrt{f^2(1-f^2)}} = \pm \int_X^0 \lambda dX, \quad (21)$$

et, d'après (19)

$$F(X) = \frac{\lambda}{q \cosh(\lambda X)}. \quad (22)$$

De même pour (18)

$$\int_{g(0)=1}^{g(T)} \frac{dg}{\sqrt{g^2(g^2-1)}} = \pm \int_0^T \Omega dT, \quad (23)$$

et, d'après (20)

$$G(T) = \frac{\Omega}{qc \cos(\Omega T)}. \quad (24)$$

Une solution particulière $u_b(x, t)$ de (1) est

$$u_b(x, t) = 4 \arctan \left[\frac{\lambda c \cos(\Omega T)}{\Omega \cosh(\lambda X)} \right], \quad (25)$$

appelée Breather.

B Annexe : Solution Kink

On cherche des solutions à profil constant, mobile à la vitesse v , c'est à dire ne dépendant que de la variable $z = x - vt$. Il vient pour l'équation de SG (1)

$$v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \omega_0^2 \sin \phi = \omega_0^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad (26)$$

ou bien

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\omega_0^2}{c^2 - v^2} \sin \phi. \quad (27)$$

En multipliant par $d\theta/dz$ et en intégrant par rapport à z on obtient

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 = -\frac{\omega_0^2}{c^2 - v^2} \cos \phi + K, \quad (28)$$

où K est une constante arbitraire d'intégration. Comme on cherche des solutions localisées spatialement, on doit avoir $\phi(z) \rightarrow 0$ et $d\phi(z)/dz \rightarrow 0$ pour $z \rightarrow \infty$, puisqu'à l'infini, tous les pendules doivent être dans leur état fondamental. On a donc $K = \omega_0^2/(c^2 - v^2)$. Un soliton ne pouvant avoir une vitesse $v > c$, (28) devient

$$\frac{\sqrt{2}\omega_0}{\sqrt{c^2 - v^2}} dz = \pm \frac{d\phi}{1 - \cos \phi}. \quad (29)$$

On intègre

$$\frac{\sqrt{2}\omega_0}{\sqrt{c^2 - v^2}} (z - z_0) = \pm \int \frac{d\phi}{1 - \cos \phi} = \pm \int \frac{d\phi}{\sqrt{2} \sin \frac{\phi}{2}} \quad (0 < \phi < 2\pi), \quad (30)$$

où z_0 est une constante d'intégration (position du soliton à l'instant initial). Or, si on pose $s = \tan(\phi/4)$, et en utilisant la relation trigonométrique suivante

$$\sin \frac{\phi}{2} = \frac{2s}{1 + s^2}, \quad d\phi = \frac{4ds}{1 + s^2}, \quad (31)$$

on a

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{2} \sin \frac{\phi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{4ds}{1 + s^2} \frac{1 + s^2}{2s} = \sqrt{2} \int \frac{dy}{y} = \sqrt{2} \ln y. \quad (32)$$

Une solution de (1) est

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{c^2 - v^2}} (z - z_0) = \pm \ln \tan \frac{\phi}{4}, \quad (33)$$

ou bien

$$\phi = 4 \arctan \exp \left[\pm \frac{\omega_0}{c} \frac{z - z_0}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} \right], \quad z = x - vt, \quad (34)$$

appelée solution Kink.

Bibliographie

- [1] REMOISSENET M, *Waves Called Solitons, Berlin Springer*, (1999).
- [2] A.C. SCOTT, *Nonlinear Science New York : Oxford University Press second edition*, (2003)
- [3] F. GENIET ET J. LEON, *Phys Rev Lett*, **89**, 134102 (2002) ; et *J Phys Cond Matt*, **15**, 2933 (2003).
- [4] J. LEON, *Phys Lett A*, **319**, 130-136 (2003).
- [5] G.L. LAMB, *Rev. Mod. Phy.*, **43**, 99-124 (1971).
- [6] P.F. BYRD ET M.D. FRIEDMAN, *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, Berlin Springer*, (1954)

Chapitre 2

Bistabilité dans sine-Gordon

1 Introduction

Dans ce chapitre, on abordera la bistabilité dans SG à travers l'exemple de la chaîne de pendules *courte*, c'est à dire, que sa longueur est inférieure à l'extension spatiale typique d'un Breather. La bistabilité traduit ici, la possibilité pour un système d'exister sous deux états stables. On verra que, pour une même fréquence (dans la bande interdite) et une même amplitude de forçage, il existe deux états pour la chaîne de pendules. Un état décrivant une onde évanescence, où les pendules oscilleront avec une faible amplitude, et un état où les pendules oscilleront avec une très grande amplitude, voir figure (2.1).

Avant d'entrer dans le vif du sujet, on fera une remarque préliminaire tout à fait intéressante. On considère un seul pendule, soumis à une force extérieure, qui le fait osciller précisément de $-\pi$ à π . Ce système très simple possède déjà la propriété de bistabilité. En effet, la moindre petite perturbation fera tourner le pendule. Il y a donc deux états possibles pour ce pendule simple, le premier oscillant de $-\pi$ à π , et le second, tournoyant, et tout ceci avec la même force extérieure. Un pendule seul est déjà un système bistable, il est donc naturel que le couplage linéaire de plusieurs pendules fabrique un système, lui aussi bistable.

On démontrera dans ce chapitre la bistabilité de l'équation de SG, en donnant tout d'abord les solutions analytiques stationnaires, puis en voyant l'exemple expérimental de la chaîne de pendules courte.

2 Équation des fonctions elliptiques de Jacobi

Notre objectif est de trouver une ou plusieurs solutions particulières de SG sous la forme explicite de fonctions elliptiques de Jacobi. Pour cela, on considère l'équation de SG normalisée suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0, \quad (2.1)$$

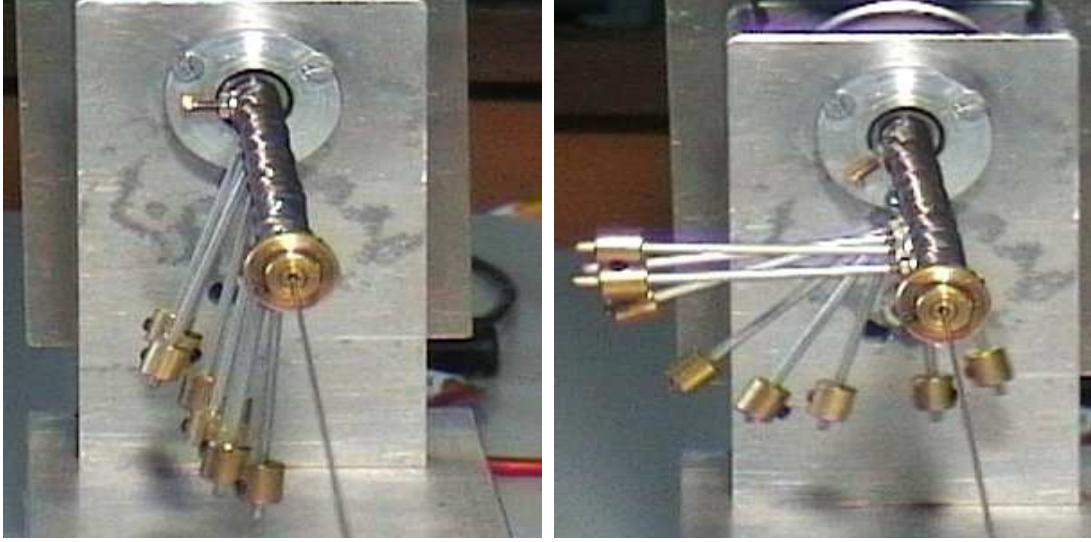


FIG. 2.1 – Photos de la chaîne de pendules courte pour une même amplitude de forçage et une même fréquence prise dans la bande interdite : La figure de gauche présente une onde stationnaire évanescente et la figure de droite une onde stationnaire de grande amplitude. Il faut bien noter la différence d’amplitude du dernier pendule (premier plan) entre les deux photos.

obtenue de (1.7) par le changement de variables $u(\omega_0 x/c, \omega_0 t) \implies u(x, t)$. On suppose que l’équation SG (2.1) admet des solutions de la forme

$$u(x, t) = 4 \arctan[X(x)T(t)], \quad (2.2)$$

suggérées en [1] et où X et T sont des fonctions arbitraires. On écrit (2.2) sous la forme $\tan(u/4) = X(x)T(t)$ et on rappelle l’identité

$$\sin u = 4 \tan(u/4) \frac{1 - \tan^2(u/4)}{(1 + \tan^2(u/4))^2} = 4XT \frac{1 - X^2 T^2}{(1 + X^2 T^2)^2}. \quad (2.3)$$

On substitue (2.2) et (2.3) dans (2.1), il vient après simplification

$$\left(\frac{1}{X^3 T^3} + \frac{1}{XT} \right) (XT_{tt} - X_{xx}T) + 2 \left(\frac{(X_x)^2}{X^2} - \frac{(T_t)^2}{T^2} \right) + \frac{1}{X^2 T^2} = 1. \quad (2.4)$$

On dérive successivement par x et t (2.4)

$$\frac{1}{T^2} \left(\frac{1}{X^2} - \frac{X_{xx}}{X^3} \right)_x + \frac{T_{tt}}{T^3} \left(\frac{1}{X^2} \right)_x - \left(\frac{X_{xx}}{X} \right)_x + 2 \left(\frac{(X_x)^2}{X^2} \right)_x = 0, \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{1}{T^2} \right)_t \left(\frac{1}{X^2} - \frac{X_{xx}}{X^3} \right)_x + \left(\frac{T_{tt}}{T^3} \right)_t \left(\frac{1}{X^2} \right)_x = 0. \quad (2.6)$$

La séparation de variables de (2.6) donne

$$\left(\frac{X_{xx}}{X^3} - \frac{1}{X^2}\right)_x \bigg/ \left(\frac{1}{X^2}\right)_x = \left(\frac{T_{tt}}{T^3}\right)_t \bigg/ \left(\frac{1}{T^2}\right)_t = C, \quad (2.7)$$

où C est une constante. On intègre (2.7)

$$X_{xx} = (C + 1)X + D_1X^3, \quad (2.8)$$

$$T_{tt} = CT + D_2T^3, \quad (2.9)$$

où D_1 et D_2 sont les constantes d'intégration. On multiplie respectivement (2.8) et (2.9) par $2X_x$ et $2T_t$, et après intégration l'on obtient

$$(X_x)^2 = \frac{D_1}{2}X^4 + (C + 1)X^2 + C_1, \quad (2.10)$$

$$(T_t)^2 = \frac{D_2}{2}T^4 + CT^2 + C_2, \quad (2.11)$$

où C_1 et C_2 sont deux nouvelles constantes d'intégration. Par substitution de (2.8), (2.9), (2.10) et (2.11) dans (2.4), on trouve

$$D_1 + 2C_2 = 0, \quad (2.12)$$

$$D_2 + 2C_1 = 0. \quad (2.13)$$

En utilisant (2.12) et (2.13) dans (2.10) et (2.11), on obtient un système d'équations différentielles couplées

$$(X_x)^2 = -C_2X^4 + (C + 1)X^2 + C_1, \quad (2.14)$$

$$(T_t)^2 = -C_1T^4 + CT^2 + C_2, \quad (2.15)$$

dont les solutions sont des fonctions elliptiques de Jacobi.

3 Solutions stationnaires dans la chaîne de pendules

3.1 La chaîne de pendules courte

Notre dispositif expérimental est la chaîne de pendules couplés présentée au chapitre 1, mais possédant moins de 10 pendules comme sur la figure (2.2).

La dynamique de cette chaîne est décrite par le modèle de Frenkel-Kontorava [2]

$$\ddot{u}_n + \delta \dot{u}_n - \omega_1^2 (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) + \omega_0^2 \sin u_n = 0, \quad (2.16)$$

où δ est un coefficient d'amortissement phénoménologique.

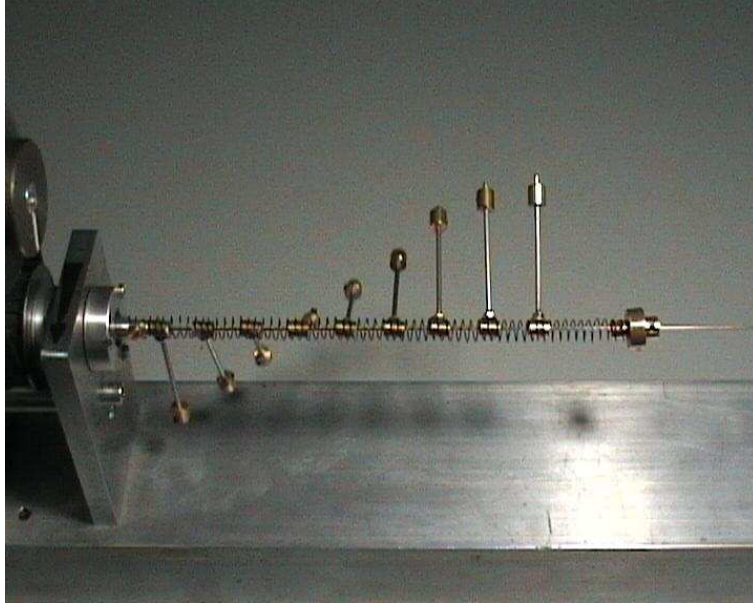


FIG. 2.2 – Photo de la chaîne de pendules courte utilisée pour les expériences.

Un moteur électrique piloté par un générateur de tension sinusoïdale impose un mouvement sinusoïdal du pendule virtuel $n = 0$, qui peut être modélisé par la condition au bord suivante

$$u_0(t) = A \sin(\Omega t), \quad (2.17)$$

où $\Omega < \omega_0$ afin de forcer la chaîne avec une fréquence dans la bande interdite. L'extrémité de la chaîne étant libre, on a

$$u_{N+1}(t) = u_N(t). \quad (2.18)$$

Pour décrire le comportement de bistabilité de la chaîne, on cherche des solutions stationnaires du modèle continu, qui décriront raisonnablement bien le système discret de la chaîne, sous les conditions de fort couplage entre les pendules.

3.2 Expression générale

Une première hypothèse fondamentale suggère que la solution (2.2) se synchronise avec la condition au bord imposée par le mouvement du moteur, d'amplitude $A \sin(\Omega t)$ et de période $2\pi/\Omega$, où Ω est la fréquence de forçage. Dans ce cas, la fonction périodique $T(t)$ doit accorder sa période avec le pendule virtuel forcé

$$T\left(t + \frac{2\pi}{\Omega}\right) = T(t). \quad (2.19)$$

C'est l'hypothèse de *synchronisation*. La seconde hypothèse demande à la solution de s'adapter à l'amplitude $A = 4 \arctan(a)$ du pendule forcé ($n = 0 \Leftrightarrow x = 0$), soit

$$X(0) = a = \tan \left[\frac{A}{4} \right]. \quad (2.20)$$

C'est l'hypothèse de *d'adaptation*. La chaîne étant constituée de N pendules, on a donc une longueur normalisée

$$L = N \frac{\omega_0 d}{\omega_1}. \quad (2.21)$$

On impose des conditions libres en fin de chaîne

$$X'(L) = 0 \quad (2.22)$$

On définit l'amplitude en fin de chaîne

$$b = 4 \arctan[B] \Leftrightarrow X(L) = B, \quad (2.23)$$

où B est un paramètre échelonnant $T(t)$ à l'unité (normalisation)

$$\max_t |T(t)| = 1. \quad (2.24)$$

Autrement dit, la mesure des amplitudes est faite sur $X(x)$, ce qui permet d'écrire (2.24) de la manière suivante

$$\exists t_0 : T'(t_0) = 0, \quad T(t_0) = 1. \quad (2.25)$$

Les paramètres C , C_1 et C_2 de (2.14) et (2.15) sont déterminés par les conditions aux bords (2.22), (2.23) et (2.25)

$$(X'(L))^2 = 0 = -C_2 B^4 + (C + 1)B^2 + C_1, \quad (2.26)$$

$$(\dot{T}(t_0))^2 = 0 = -C_1 + C + C_2, \quad (2.27)$$

d'où l'on extrait

$$c = \frac{c_2 B^4 - B^2 - c_2}{B^2 + 1}, \quad (2.28)$$

$$c_1 = \frac{B^2(B^2 c_2 + c_2 - 1)}{B^2 + 1}. \quad (2.29)$$

Ainsi, (2.14) et (2.15) deviennent

$$(X_x)^2 = c_2(B^2 - X^2) \left(X^2 + 1 - \frac{1}{c_2(1 + B^2)} \right), \quad (2.30)$$

$$(T_t)^2 = c_2(1 - T^2) \left(T^2 B^2 - \frac{T^2 B^2}{c_2(1 + B^2)} + 1 \right). \quad (2.31)$$

En posant

$$\alpha = B^2 c_2 - \frac{B^2}{1 + B^2}, \quad (2.32)$$

$$\Gamma = \frac{1}{B^2} + \frac{1}{\alpha(1 + B^2)}, \quad (2.33)$$

on obtient ces équations différentielles

$$(X_x)^2 = \alpha \Gamma (B^2 - X^2) \left(X^2 + \frac{1}{\Gamma B^2} \right), \quad (2.34)$$

$$(T_t)^2 = \alpha (1 - T^2) (T^2 + \Gamma), \quad (2.35)$$

où α est un paramètre libre.

3.3 Solutions stationnaires

En accord avec (2.22), (2.23) et (2.24), l'équation pour $X(x)$ est intégrée sur l'intervalle $[x, L]$ et l'équation pour $T(t)$ est intégrée sur l'intervalle $[t, t_0]$. Les solutions sont complètement déterminées en termes de fonctions elliptiques de Jacobi par les valeurs de trois paramètres : l'amplitude B , la fréquence de forçage Ω et la longueur L .

Il existe trois types de solutions stationnaires, dont on donne le détail du calcul, des solutions et des paramètres mis en jeu, en annexe (p.55). On obtient

$$u^I(x, t) = 4 \arctan[B \operatorname{cn}(k_1(x - L), \mu_1) \operatorname{cn}(\omega_1(t - t_0), \nu_1)], \quad \infty > B > B_1,$$

$$u^{II}(x, t) = 4 \arctan[B \operatorname{dn}(k_2(x - L), \mu_2) \operatorname{sn}(\omega_2(t - t_1), \nu_2)], \quad B_1 > B > B_0,$$

$$u^{III}(x, t) = 4 \arctan \left[\frac{B \operatorname{sn}(\omega_2(t - t_1), \nu_2)}{\operatorname{dn}(k_3(x - L), \mu_3)} \right], \quad B_0 > B > 0, \quad (2.36)$$

où

$$B_1 = \frac{\sqrt{1 - \Omega^2}}{\Omega}, \quad \Omega \mathbb{K}(B_0^2) = \frac{\pi}{2(1 + B_0^2)}, \quad (2.37)$$

et

$$\mathbb{K}(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \xi}}, \quad (2.38)$$

est l'intégrale elliptique complète. Les quantités B , ν_j , μ_j et k_j sont des paramètres soumis à des relations qui sont l'analogue nonlinéaire d'une relation de dispersion et qui assurent que les u^j sont solutions de (2.1).

A ce stade, il est intéressant de remarquer que l'amplitude en $x = L$ de la solution $u^I(x, t)$ n'existe que pour $B > B_1$ soit

$$u^I(L, t) = 4 \arctan[B] > 4 \arctan \left[\frac{\sqrt{1 - \Omega^2}}{\Omega} \right] = A_s, \quad (2.39)$$

où A_s est le seuil de supratransmission de SG donné en (1.37). Autrement dit, cette solution est accessible, uniquement si l'on dépasse le seuil de supratransmission.

Tout comme les fonctions sinus et cosinus, les fonctions elliptiques sont périodiques, mais leur période est de $4\mathbb{K}$. La condition de synchronisation (2.19) impose alors

$$\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{4\mathbb{K}}{\omega_{1,2}}. \quad (2.40)$$

\mathbb{K} et ω étant fonction de ν_1 ou de ν_2 , on a

$$\Omega \mathbb{K}(\nu_{1,2}) = \frac{\pi}{2} \omega(\nu_{1,2}), \quad (2.41)$$

avec

$$\omega_1^2 = \frac{B^2}{1 + B^2} \frac{1}{B^2 - \nu_1^2(1 + B^2)}, \quad \omega_2^2 = \frac{B^2}{(1 + B^2)(B^2 + \nu_2^2)}. \quad (2.42)$$

Il est donc possible de tracer numériquement $\nu_{1,2}$ en fonction de B , à partir de (2.41) pour une valeur de Ω donnée, voir figure (2.3).

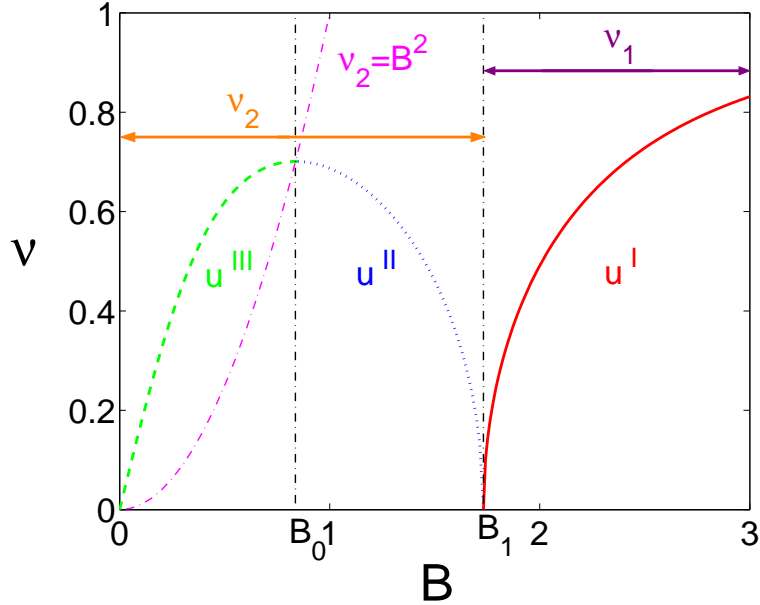


FIG. 2.3 – ν en fonction de B avec $\Omega = 0.5$ et $L = 4$.

On observe que le paramètre B détermine de manière unique le paramètre ν , et ainsi, toutes les solutions (2.36) sont déterminées puisque les six autres paramètres nécessaires sont fonction de B et ν

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{1}{1+B^2} \frac{B^4(1-\nu_1^2) + \nu_1^2}{B^2 - \nu_1^2(1+B^2)}, & \mu_1^2 &= \frac{B^4(1-\nu_1^2)}{B^4(1-\nu_1^2) + \nu_1^2}, \\ k_2^2 &= \frac{B^4}{(1+B^2)(B^2 + \nu_2^2)}, & \mu_2^2 &= 1 - \frac{\nu_2^2}{B^4}, \\ k_3^2 &= \frac{\nu_2^2}{(1+B^2)(B^2 + \nu_2^2)}, & \mu_3^2 &= 1 - \frac{B^4}{\nu_2^2}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

De plus, la valeur de B détermine les différentes solutions u^I, u^{II} ou u^{III} . En effet, le paramètre ν_1 n'a pas de solution pour $B < B_1$, où B_1 est la valeur de B quand $u^I = u^{II}$. Ainsi la solution u^I n'est valable que pour $B > B_1$. De même, il existe un paramètre B_0 qui définit la frontière entre u^{II} et u^{III} . En effet, les modules μ_2 et μ_3 doivent être positifs, ce qui impose, d'après (2.43)

$$\mu_2 > 0 \iff \nu_2 < B^2, \quad (2.44)$$

$$\mu_3 > 0 \iff \nu_2 > B^2. \quad (2.45)$$

On a donc tracé sur la figure (2.3), la droite d'équation $\nu_2 = B^2$. Ainsi, les valeurs de ν_2 inférieure à B^2 correspondent à la solution u^{II} , et celles supérieures à B^2 correspondent à la solution u^{III} .

4 Comportement de bistabilité dans SG

On réalise dans cette section des *expériences numériques*, afin d'explorer les propriétés numériques de SG continue qui nous amèneront ensuite à comprendre la bistabilité.

4.1 Expériences numériques

Le système est le modèle continu SG soumis à des conditions de bords périodiques en $x = 0$ et libres en $x = L$

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u + \delta u_t = 0, \quad u(0, t) = A \cos(\Omega t), \quad u_t(L, t) = 0, \quad 0 < \Omega < 1, \quad (2.46)$$

où δ rend compte de l'amortissement. On regarde le comportement de SG amortie avec les conditions de bords précédentes pour différentes formes d'amplitude de forçage. Pour commencer, on procède en augmentant progressivement l'amplitude A , tel qu'on le représente sur la figure (2.4).

Les deux graphiques de la figure (2.5) présentent l'amplitude $u(x, t)$ pour deux valeurs d'amplitude de forçage différentes en $x = L$. Dans le cas de la chaîne courte, cela représente l'amplitude angulaire du dernier pendule.

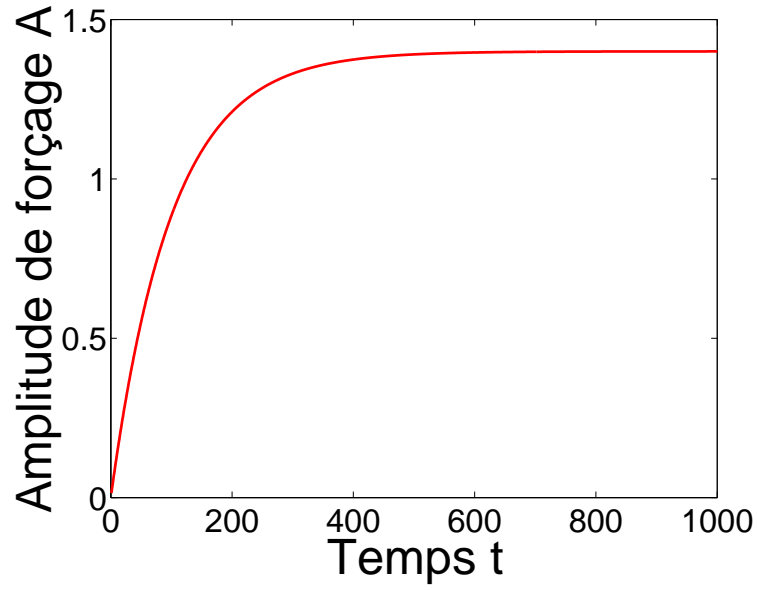


FIG. 2.4 – Amplitude de forçage A en fonction du temps permettant d'établir une amplitude maximale de façon adiabatique

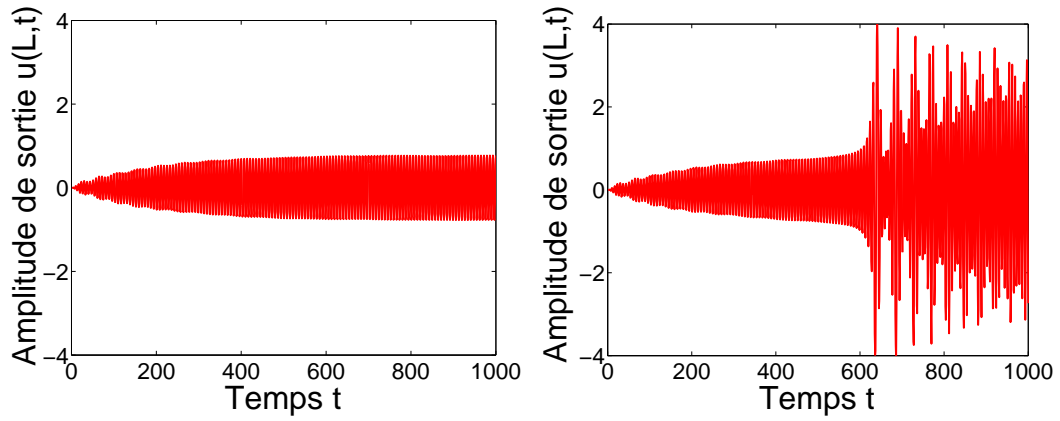


FIG. 2.5 – Tracé de l'amplitude en $x = L = 4$ en fonction du temps, pour une amplitude maximale de 1.39 sur la figure de gauche et de 1.40 sur la figure de droite, pour une fréquence $\Omega = 0.9$ et un amortissement $\delta = 0.01$. Il faut noter la grande différence d'amplitude des oscillations au passage du seuil de supratransmission.

On voit très nettement la différence d'amplitude en $x = L$ entre les deux figures. Le système est passé d'un état stationnaire de faible amplitude vers un état stationnaire d'intense amplitude de sortie. la figure de gauche présente des amplitudes d'environ $0.8rad \approx 45^\circ$ alors que la figure de droite présente des amplitudes de l'ordre de $3.7rad \approx 210^\circ$. Le passage d'un état à l'autre se fait lorsque l'on atteint le seuil de supratransmission $A_s \approx 1.4rad \approx 80^\circ$. Il y a donc deux comportements, différents suivant si l'amplitude de forçage est suffisante ou non.

On effectue d'autres simulations numériques, où l'on augmente progressivement le forçage A jusqu'au seuil de supratransmission, et une fois que le système a bifurqué sur un état de grande amplitude, on redescend progressivement l'amplitude. On réalise d'abord une simulation avec un amortissement nul (cf figure 2.6). Le système nécessite un laps de temps pour bifurquer, c'est pour cela que

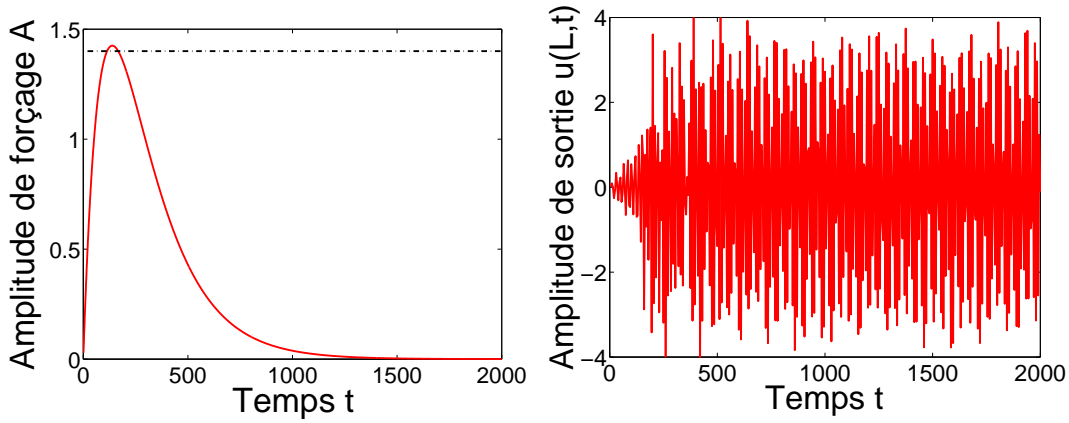


FIG. 2.6 – A gauche est tracée l'amplitude $A(t)$, et à droite, la déviation angulaire $u(x = L, t)$ pour $\Omega = 0.9$ $\delta = 0$. La ligne en traits et points représente le seuil de supratransmission $A_s = 1.4$.

l'amplitude de forçage A dépasse le seuil A_s . On note, par ailleurs, que le système reste bloqué sur l'état de grande amplitude, même si l'on arrête totalement le forçage $A = 0$ en l'absence d'amortissements (sans frottements).

Pour un système possédant de l'amortissement, on montre qu'il y a un seuil inférieur A_e , pour lequel le système revient à un état de faible amplitude. La figure (2.7) montre l'allure de l'amplitude A que l'on utilise pour les simulations réalisées avec un système possédant de l'amortissement.

Les figures (2.8) présentent l'amplitude de $u(x, t)$ en $x = L$. La figure de gauche montre le cas où l'on redescend l'amplitude juste au-dessus de A_e , et la figure de droite, le cas où l'on redescend l'amplitude à A_e .

On voit très nettement, qu'après avoir bifurqué vers un état intense d'amplitude, le système reste bloqué dans cet état, s'il réside une amplitude de forçage

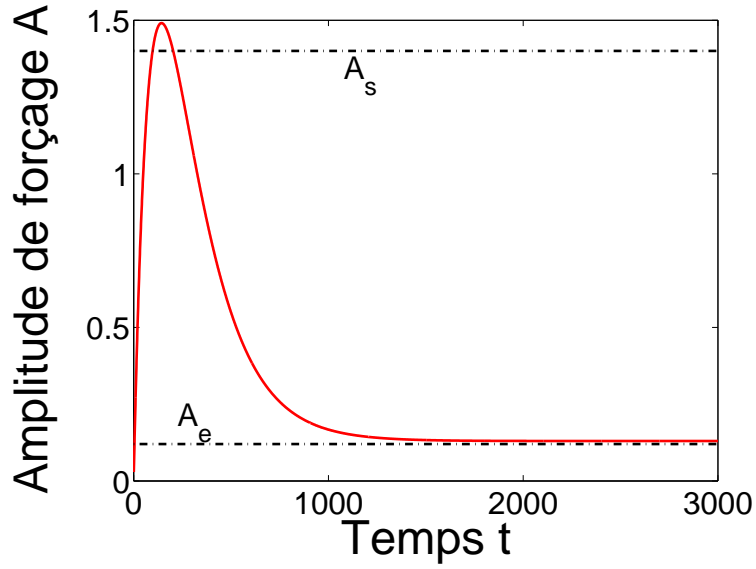


FIG. 2.7 – Tracé de l'amplitude $A(t)$ en rouge. Les lignes en traits et points représentent le seuil de supratransmission $A_s = 1.4$ et le seuil d'extinction $A_e = 0.12$.

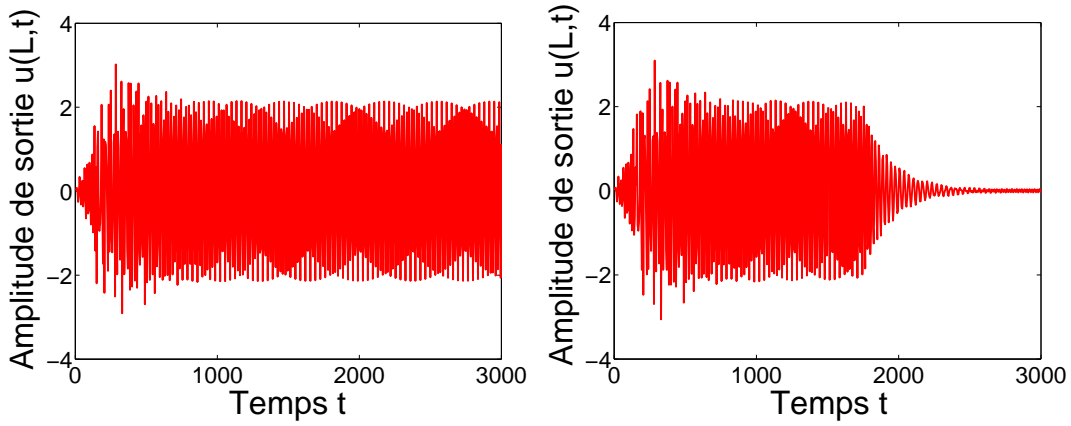


FIG. 2.8 – Tracé des amplitudes de $u(L,t)$ avec $\Omega = 0.9$ et $\gamma = 0.01$. À gauche, le système reste bloqué sur l'état de grande amplitude ($A_{fin} > A_e$), alors qu'à droite, le système est redescendu sur un état de faible amplitude de sortie ($A_{fin} < A_e$).

suffisante pour compenser les frottements. En effet, le franchissement du seuil d'extinction entraîne le retour du système vers un état de faible amplitude.

Ces séries d'expériences numériques ont permis de démontrer l'existence d'un seuil de supratransmission A_s au-delà duquel le système est dans un état d'intense amplitude de sortie en $x = L$, et d'un seuil d'extinction A_e , où le système redescend sur un état évanescent de faible amplitude de sortie. Par conséquent, il semblerait qu'il existe deux états possibles pour une même amplitude de forçage. En effet, si l'on choisit une amplitude comprise entre le seuil d'extinction et le seuil de supratransmission, le système est alors, pour le moment, dans un état évanescent. Maintenant, si on augmente progressivement l'amplitude jusqu'au seuil de supratransmission, le système bifurque sur un état de grande amplitude. Si, ensuite, on redescend l'amplitude jusqu'à l'amplitude de départ, celle-ci étant supérieure au seuil d'extinction, le système reste dans un état intense d'amplitude. Il y a donc deux états possibles pour une même amplitude de forçage (et même fréquence), c'est la bistabilité nonlinéaire.

On montre, grâce à une dernière simulation, le phénomène de bistabilité. On choisit une amplitude de forçage $A_1 = 0.3$. Cette amplitude est, bien sûr, au-dessus de A_e mais en-dessous de A_s . Il faut montrer qu'il existe deux états pour cette même amplitude. On propose donc de forcer le système avec une amplitude A comme représentée sur la figure gauche (2.9).

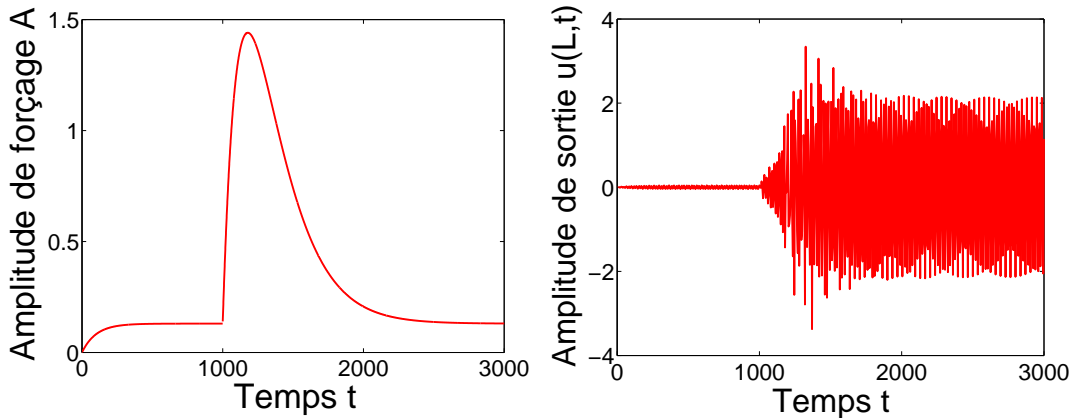


FIG. 2.9 – Gauche : Tracé de $A(t)$ avec $A_1 = 0.3$, $\Omega = 0.9$ et $\delta = 0.01$. Droite : amplitude $u(x = 4, t)$

On voit nettement que pour $t < 1000$, le système forcé avec une amplitude A_1 est dans un état évanescent. Lorsque l'on augmente progressivement, à partir de $t = 1000$, l'amplitude A jusqu'au seuil de supratransmission, le système bifurque sur un état de grande amplitude. Ensuite, en redescendant l'amplitude de forçage à A_1 , le système reste dans son état de grande amplitude de sortie. Le système présente donc deux états stationnaires différents, pour une même amplitude et

fréquence de forçage. Pour revenir à un état évanescent, il faudrait, bien sûr, redescendre l'amplitude de forçage A au seuil d'extinction A_e .

Bien plus qu'un comportement de bistabilité, on a un phénomène d'hystérésis. En effet, le chemin suivi par l'amplitude de sortie, lors de la redescende de l'amplitude de forçage, après que le système ait bifurqué, n'est pas le même que celui pris, lors de la montée de l'amplitude de forçage, pour faire bifurquer le système. Il réside un phénomène de mémoire, qui fait que l'amplitude en $x = L$ reste sur un état de grande amplitude et ne diminue pas, tant que l'amplitude A est plus grande que le seuil d'extinction A_e .

4.2 Interprétation de la bistabilité

On rappelle les trois solutions stationnaires

$$u^I(x, t) = 4 \arctan[B \operatorname{cn}(k_1(x - L), \mu_1) \operatorname{cn}(\omega_1(t - t_0), \nu_1)], \quad \infty > B > B_1,$$

$$u^{II}(x, t) = 4 \arctan[B \operatorname{dn}(k_2(x - L), \mu_2) \operatorname{sn}(\omega_2(t - t_1), \nu_2)], \quad B_1 > B > B_0,$$

$$u^{III}(x, t) = 4 \arctan \left[\frac{B \operatorname{sn}(\omega_2(t - t_1), \nu_2)}{\operatorname{dn}(k_3(x - L), \mu_3)} \right], \quad B_0 > B > 0. \quad (2.47)$$

On souhaite tracer l'amplitude de sortie $b = 4 \arctan[B]$, c'est-à-dire $u(L, t_0)$, en fonction de l'amplitude d'entrée $A = 4 \arctan[a]$, c'est-à-dire $u(0, t_0)$. On rappelle qu'en $t = t_0$, la fonction $T(t = t_0) = 1$. Concrètement, on dresse un tableau de valeurs des trois fonctions $u(x, t)$ en $x = 0$ pour différentes valeurs de B , ce qui nous donne $A(B)$. Ensuite, on inverse le graphe $A(B)$ et on peut tracer $4 \arctan[B(A)]$. Le résultat est présenté sur la figure (2.10).

Il y a donc trois solutions possibles pour une même amplitude d'entrée. Cependant, on peut montrer que les solutions à dérivées négatives sont instables. On a donc finalement deux solutions stables, pour une même amplitude et même fréquence de forçage, qui permettent de décrire les régimes stationnaires. On réalise des simulations numériques telles que celles effectuées précédemment, où on fixe le seuil d'entrée A_1 et on observe les deux états, tout en relevant leur amplitude de sortie. On a tracé avec des croix, sur la figure (2.10), le résultat de ces simulations numériques. Elles montrent une parfaite concordance avec le modèle des solutions stationnaires. Pour une amplitude donnée, inférieure au seuil de supratransmission, le système se bloque sur la solution évanescente de faible amplitude u^{III} . Au fur et à mesure que l'on augmente l'amplitude de forçage, l'amplitude de sortie b suit l'évolution de la solution u^{III} jusqu'au seuil de supratransmission, où le système bifurque et se bloque sur la solution à grande

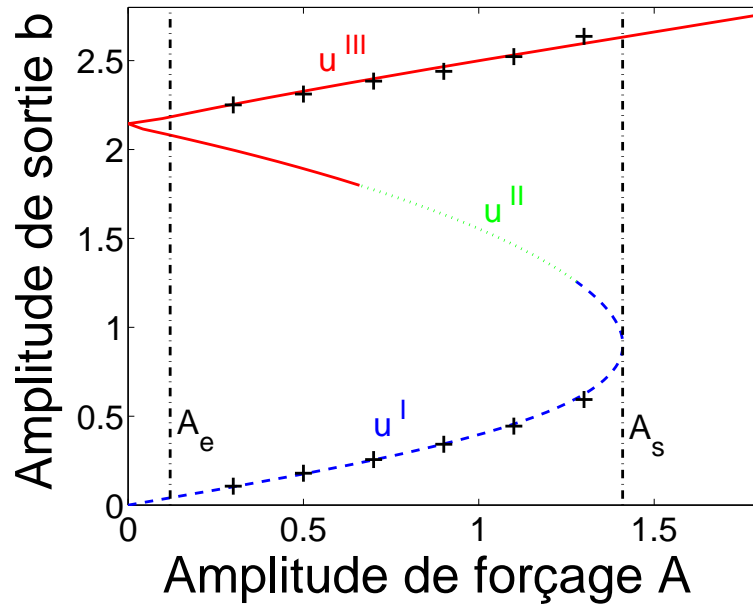


FIG. 2.10 – Amplitude de sortie $a = 4 \arctan[B]$ en fonction de l'amplitude de forçage A . La solution obtenue à partir de u^I est en traits discontinus bleus, à partir de u^{II} , en pointillé verts et à partir de u^{III} , en rouge. Les lignes en traits et points noirs désignent le seuil d'extinction A_e et le seuil de supratransmission A_s . Les croix représentent le résultat de simulations numériques de (2.46) pour différentes valeurs d'amplitude d'entrée avec $\Omega = 0.9$, $L = 4$ et $\delta = 0.01$.

amplitude u^I . Ensuite, le système suit la décroissance selon u^I , lorsque l'on diminue l'amplitude de forçage A , et ce, jusqu'au seuil d'extinction A_e . Le trajet suivi par l'amplitude de sortie b correspond à l'hystérésis du système.

4.3 Expériences sur la chaîne de pendules courte

La chose intéressante est de confronter le modèle des solutions analytiques stationnaires de SG continue avec le résultat d'expériences sur la chaîne de pendules courte. L'expérience de bistabilité consiste à forcer la chaîne courte avec une fréquence prise dans la bande interdite, et avec une amplitude d'entrée A , qui varie de 0 au seuil de supratransmission A_s . Sans perturbation extérieure, le système se bloque sur une solution périodique de faible amplitude, dont la limite continue analytique est la solution u^{III} de (2.47). Grâce à un petit choc sur la chaîne de pendules [3], le système bifurque sur un état de très grande amplitude de sortie, dont la limite continue est la solution u^I de (2.47). Les figures (2.11) montrent des photos d'expériences de bistabilité sur la chaîne de pendules courte.

On a alors mené, par la suite, des expériences sur la chaîne de pendules courte, avec une fréquence $\omega = 0.5 \omega_0$, et en faisant varier l'amplitude d'entrée A . La fréquence Ω étant une fréquence normalisée, elle représente pour la chaîne de pendules courte, le rapport entre la fréquence de forçage et la fréquence propre ω_0 . Après le relevé de l'amplitude de sortie évanescence, on fait bifurquer le système, et on observe le mode stationnaire de grande amplitude. La figure (2.12) montre le résultat de cette expérience en comparaison avec les solutions analytiques stationnaires (2.44) issues du modèle des milieux continus, valables pour un fort couplage.

On peut remarquer le grand accord des expériences avec les solutions analytiques stationnaires du modèle continu SG. La même méthode que celle utilisée dans les simulations numériques est possible pour faire bifurquer la chaîne de pendules, c'est-à-dire en suivant le diagramme d'hystérésis. On augmente progressivement l'amplitude du premier pendule, jusqu'à ce que le système bifurque sur un état de grande amplitude puis on redescend l'amplitude jusqu'à l'amplitude de forçage souhaitée.

4.4 Détermination du seuil de supratransmission à partir des solutions analytiques

Le seuil de bifurcation peut être calculé en recherchant la valeur maximale que peut prendre A dans le mode évanescence (traits discontinus bleus) de la fonction $b(A) = 4 \arctan[B]$ de la figure (2.12). Autrement dit, on cherche l'extremum de la fonction

$$A(b) = 4 \arctan \left[\frac{B}{\operatorname{dn}(k_3(L), \mu_3)} \right]. \quad (2.48)$$

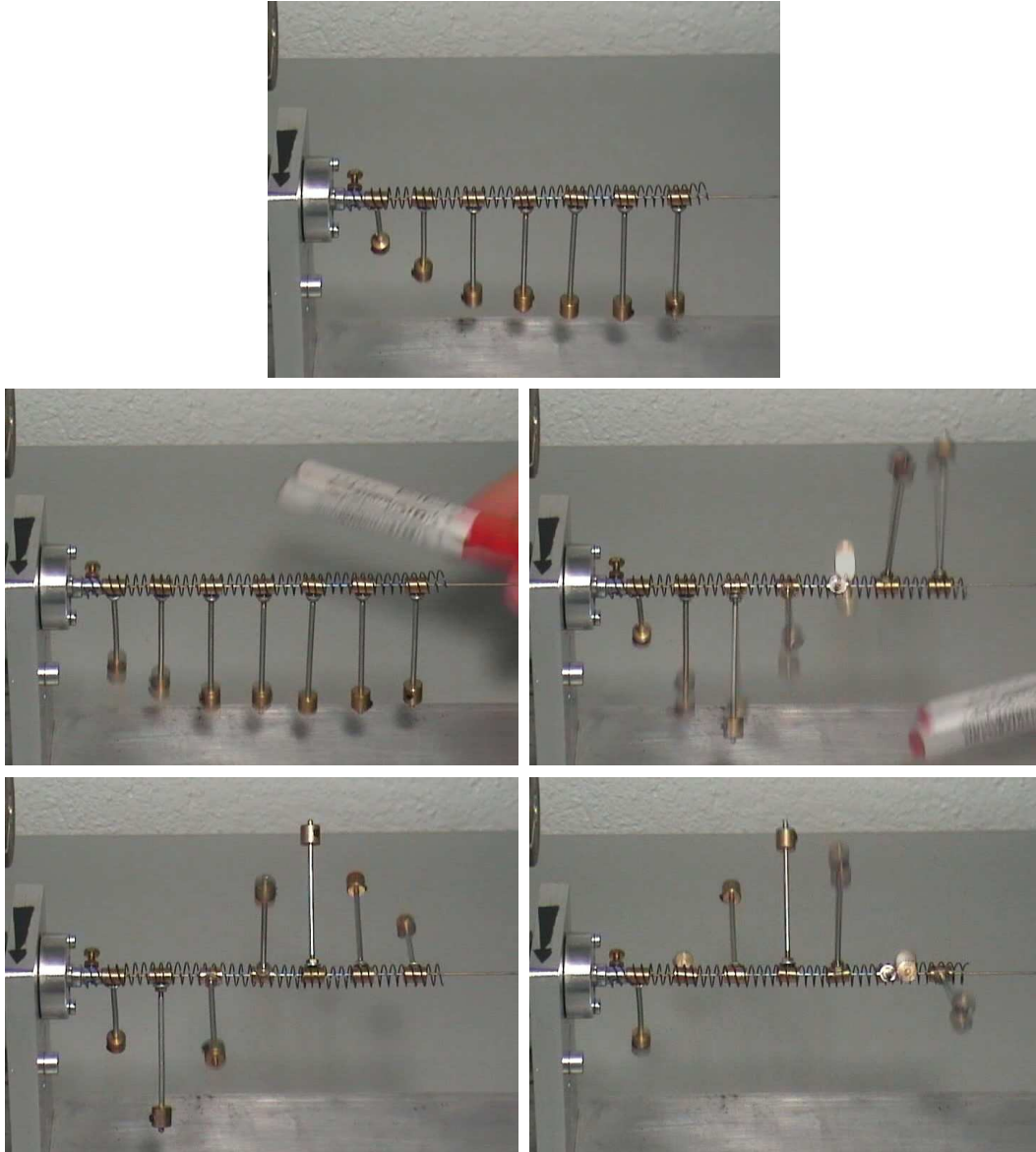


FIG. 2.11 – La première image montre le mode évanescent. Les deux images suivantes montrent le choc pour faire bifurquer le système. Les deux dernières montrent le mode de grande amplitude. Il faut noter la très grande différence d'amplitude entre la première et les dernières photos, et ce, pour une même amplitude de forçage et une même fréquence $\Omega/2\pi \approx 1.5$ Hz

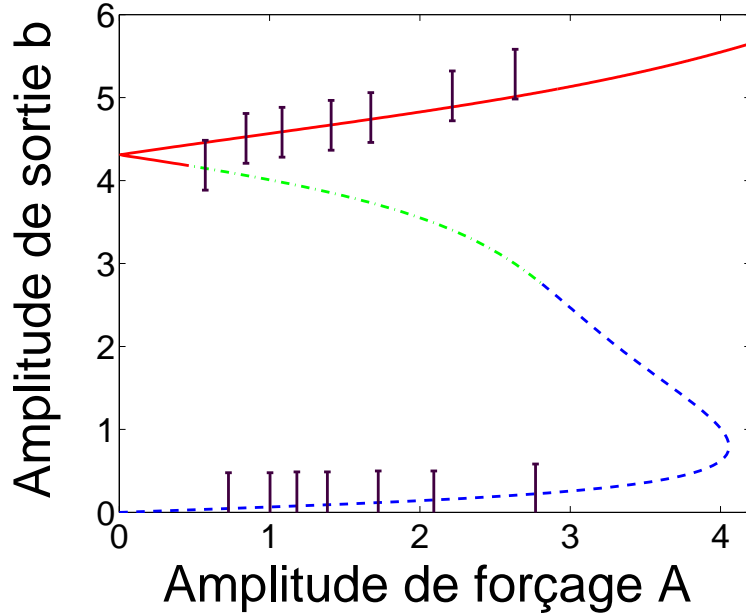


FIG. 2.12 – Courbe d’hystérésis obtenue à partir des solutions analytiques stationnaires (2.44) pour une fréquence $\Omega = 0.5$. Les barres d’erreurs représentent le résultat d’expériences sur la chaîne courte, dont les caractéristiques sont $\omega_0 = 15.1$ Hz et $\omega_1 = 32.4$ Hz.

k_3 et μ_3 sont fonction de B et ν_2 , or la donnée de B nous permet de connaître ν_2 . Le seul vrai paramètre est donc B . De plus, la fonction arctan est croissante, on peut donc déterminer l’extremum de $A(b)$ en trouvant la valeur B_e définie par

$$\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{B}{\text{dn}(k_3(L), \mu_3)} \right)_{B=B_e} = 0. \quad (2.49)$$

Ainsi, le seuil de supratransmission est donné par

$$A_s = 4 \arctan \left[\frac{B_e}{\text{dn}(k_3(L), \mu_3)} \right]. \quad (2.50)$$

L’expression de B_e n’est, bien sûr, pas explicite et doit être déterminée numériquement. Dans notre exemple ($\Omega = 0.5, L = 4$), on obtient $A_s = 4.06 \text{ rad} \approx 233^\circ$, tandis que la formule approchée (1.37), dérivée de la limite $L \rightarrow \infty$ donne $A_s = 4.19$.

4.5 Limites

On a donc démontré le comportement de bistabilité d’une chaîne de pendules courte, avec des expériences réalisées sur une chaîne de 9 pendules. Cependant, une question se pose : que se passe-t-il quand on augmente ou diminue le nombre

de pendules? Avant de répondre, on a tracé les graphiques $b(A)$ pour différents nombres de pendules sur les figures (2.13) et (2.14)

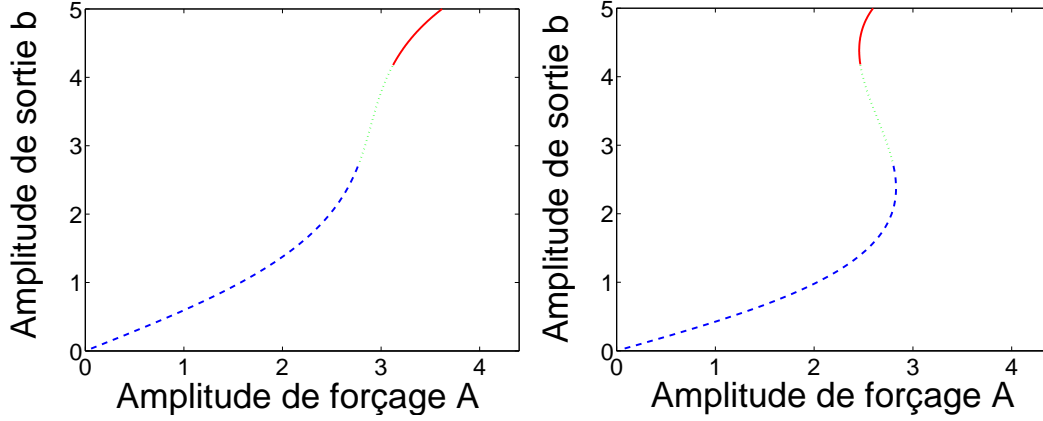


FIG. 2.13 – Tracé de l’amplitude de sortie $b(A)$ avec $\Omega = 0.5$. La figure de gauche présente le diagramme d’hystérésis pour $N = 3 \rightarrow L = 1.33$ et celle de droite pour $N = 4 \rightarrow L = 1.78$.

On voit que, dans le cas de chaînes extrêmement courtes ($N < 4$), le comportement de bistabilité cesse d’exister, similairement à ce que l’on observe dans les milieux optiques nonlinéaires [4, 5].

D’après les figures (2.14), dans le cas de plus grandes chaînes $N > 10$, les calculs analytiques montrent l’existence de plusieurs amplitudes de sortie (plus de trois), pour une même amplitude d’entrée. Cependant, les expériences menées sur les chaînes de plus de onze pendules, montrent l’impossibilité d’atteindre des régimes multistables. En effet, il semblerait que la chaîne soit assez grande pour permettre la localisation, c’est-à-dire la génération de Breathers.

5 Bistabilité dans la bande passante

Existe-t-il un comportement de bistabilité lorsque l’on force la chaîne avec une fréquence prise dans la bande passante?

D’un point de vue expérimental [3] la réponse est donnée par les deux photos figure (2.15).

On voit très nettement l’existence de deux états stationnaires différents pour une même amplitude et même fréquence de forçage. Le passage d’un état à un autre se fait grâce à un choc sur la chaîne de pendules comme cela été fait auparavant.

D’un point de vue analytique, la condition $\Omega > 1$ entraîne la disparition des solutions u^{II} et u^{III} . Ainsi, seule la solution u^I permet de décrire le comportement de bistabilité dans la bande passante, soit

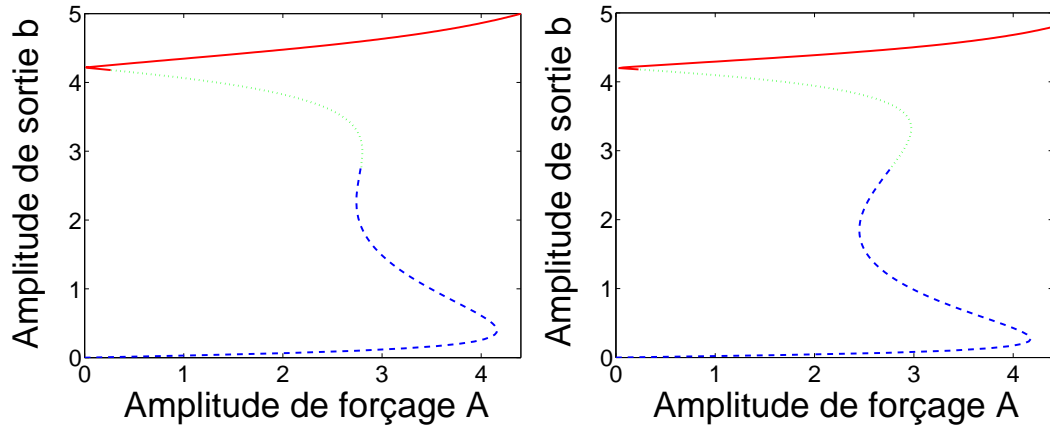


FIG. 2.14 – Tracé de l'amplitude de sortie $b(A)$ avec $\Omega = 0.5$. La figure de gauche présente le diagramme d'hystérésis pour $N = 11 \rightarrow L = 4.9$ et celle de droite pour $N = 4 \rightarrow L = 5.34$.

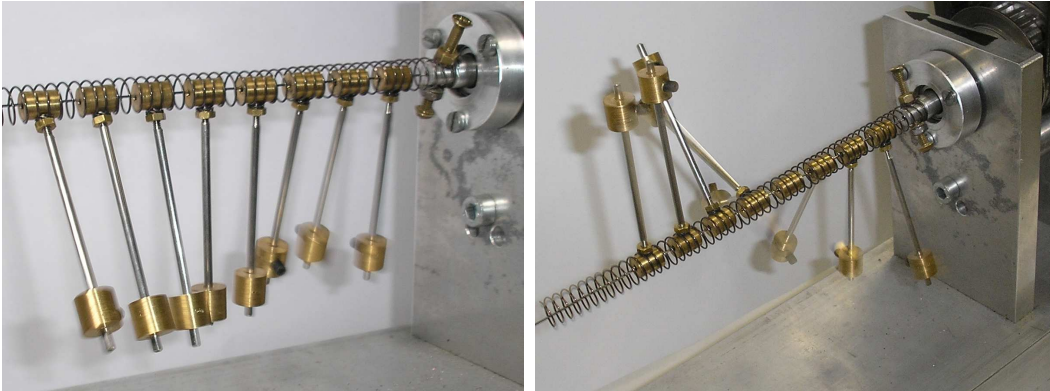


FIG. 2.15 – Photos de la chaîne de pendules courte pour une même amplitude de forçage et une même fréquence prise dans la bande passante.

$$u^I(x, t) = 4 \arctan[B \operatorname{cn}(k(x - L), \mu) \operatorname{cn}(\omega(t - t_0), \nu)], \quad (2.51)$$

où

$$k^2 = \frac{1}{1 + B^2} \frac{B^4(1 - \nu^2) + \nu^2}{B^2 - \nu^2(1 + B^2)}, \quad \mu^2 = \frac{B^4(1 - \nu^2)}{B^4(1 - \nu^2) + \nu^2}, \quad (2.52)$$

$$\omega^2 = \frac{B^2}{1 + B^2} \frac{1}{B^2 - \nu^2(1 + B^2)}, \quad \Omega \mathbb{K}(\nu) = \frac{\pi}{2} \omega$$

On trace, en figure (2.16), l'amplitude de sortie b en fonction de l'amplitude de forçage A à partir de la solution stationnaire (2.51).

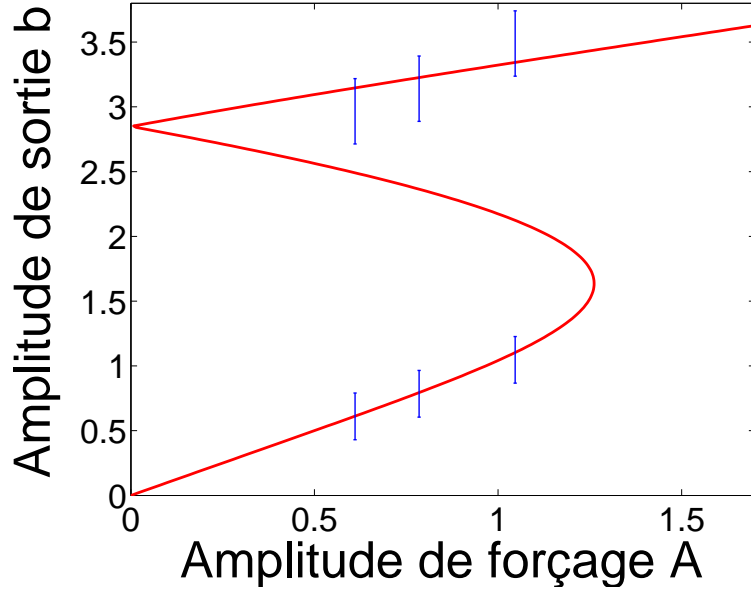


FIG. 2.16 – Courbe d'hystérésis obtenue à partir de la solution analytique stationnaire (2.51) pour une longueur $L = 4.66$. Les barres d'erreurs représentent le résultat d'expériences sur la chaîne courte (8 pendules) obtenu pour une fréquence de forçage d'environ 18Hz soit une fréquence normalisée de $\Omega = 1.2$.

On a également ajouté sur la figure (2.16) le résultat d'expériences sur la chaîne de pendules courte. Cependant, les oscillations des pendules étant très rapides, il est difficile d'obtenir des résultats précis, ce qui explique le peu de mesures sur le graphique.

A Annexe : Solutions stationnaires SG

D'après les tables [6], on a

$$[\text{cn}]^{-1}(y, m) = \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1+m^2(t^2-1))}}, \quad (1)$$

$$[\text{sn}]^{-1}(y, m) = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-m^2t^2)}}, \quad (2)$$

$$[\text{dn}]^{-1}(y, m) = \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-1+m^2)}}, \quad (3)$$

$$[1/\text{dn}]^{-1}(y, m) = \int_1^y \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-t^2(1-m^2))}}, \quad (4)$$

où $\text{cn}(\dots, m)$ est la fonction elliptique d'amplitude cosinus de Jacobi de module $1 \geq m \geq 0$, $\text{sn}(\dots, m)$ la fonction d'amplitude sinus, $\text{dn}(\dots, m)$ la fonction d'amplitude Delta et $[\dots]^{-1}$ désigne la fonction inverse.

On rappelle les équations différentielles (2.34) et (2.35)

$$(X_x)^2 = \alpha \Gamma (B^2 - X^2) \left(X^2 + \frac{1}{\Gamma B^2} \right), \quad (5)$$

$$(T_t)^2 = \alpha (1 - T^2) (T^2 + \Gamma). \quad (6)$$

A.1 Solution $u^{(I)}$: $\alpha > 0$ et $\Gamma > 0$

Solution $T^{(I)}$

On écrit (6) sous la forme

$$T_t = \sqrt{\alpha(1+\Gamma)} \sqrt{(1-T^2) \left(1 + \frac{1}{1+\Gamma} (T^2 - 1) \right)}. \quad (7)$$

On intègre entre t et t_0

$$\int_{T(t)}^{T(t_0)=1} \frac{dT}{\sqrt{(1-T^2) \left(1 + \frac{1}{1+\Gamma} (T^2 - 1) \right)}} = \int_t^{t_0} \sqrt{\alpha(1+\Gamma)} dt, \quad (8)$$

et donc d'après (1)

$$T(t) = \text{cn}(\omega(t - t_0), \nu), \quad \omega_1^2 = \alpha(1+\Gamma), \quad \nu_1^2 = \frac{1}{1+\Gamma}. \quad (9)$$

Les conditions $\alpha \geq 0$ et $\omega_1^2 \geq 0$ imposent $\Gamma \geq 0$. De 9, on obtient

$$\alpha = \omega_1^2 \nu_1^2, \quad \omega_1^2 = \frac{B^2}{1+B^2} \frac{1}{B^2 - \nu_1^2(1+B^2)}. \quad (10)$$

Solution $X^{(I)}$

On écrit (5) sous la forme

$$X_x = B \sqrt{\alpha \Gamma \left(\frac{1}{\Gamma B^2} \right)} \sqrt{(1 - X^2/B^2) \left(1 + \frac{\Gamma B^4}{1 + \Gamma B^4} (T^2 - 1) \right)}. \quad (11)$$

On intègre entre x et L

$$\int_{X(L)/B}^{X(L)/B=1} \frac{d(X/B)}{\sqrt{(1 - X^2/B^2) \left(1 + \frac{\Gamma B^4}{1 + \Gamma B^4} (T^2 - 1) \right)}} = \int_x^L \sqrt{\alpha \Gamma \left(\frac{1}{\Gamma B^2} \right)} dx, \quad (12)$$

et donc d'après (1)

$$X(x) = B \operatorname{cn}(k_1(x - L), \mu_1), \quad k_1^2 = \alpha \Gamma \left(B^2 + \frac{1}{\Gamma B^2} \right) \quad \mu_1^2 = \frac{\Gamma B^4}{1 + \Gamma B^4}. \quad (13)$$

De (13) on obtient

$$\alpha = k_1^2 B^2 (1 - \mu_1^2), \quad k_1^2 = \frac{1}{1+B^2} \frac{B^4(1 - \nu_1^2) + \nu_1^2}{B^2 - \nu_1^2(1+B^2)}, \quad \mu_1^2 = \frac{B^4(1 - \nu_1^2)}{B^4(1 - \nu_1^2) + \nu_1^2}. \quad (14)$$

La solution recherchée est

$$u^I(x, t) = 4 \arctan[B \operatorname{cn}(k_1(x - L), \mu_1) \operatorname{cn}(\omega_1(t - t_0), \nu_1)]. \quad (15)$$

A.2 Solution $u^{(II)}$: $\alpha < 0$, $\Gamma < 0$ et $\Lambda B^4 > 1$

On pose

$$\beta = -\alpha, \quad \Lambda = -\Gamma = \frac{1}{\beta(1+B^2)} - \frac{1}{B^2}. \quad (16)$$

Solution $T^{(II)}$

On écrit (6) sous la forme

$$T_t = \sqrt{\beta \Lambda} \sqrt{(1 - T^2) \left(1 - \frac{T^2}{\Lambda} \right)}. \quad (17)$$

On intègre entre t_1 et t

$$\int_{T(t_1)=0}^{T(t)} \frac{dT}{\sqrt{(1-T^2)\left(1-\frac{T^2}{\Lambda}\right)}} = \int_{t_1}^t \sqrt{\beta\Lambda} \, dt, \quad (18)$$

et donc d'après (2)

$$T(t) = \operatorname{sn}(\omega_2(t - t_1), \nu_2), \quad \omega_2^2 = \beta\Lambda, \quad \nu_2^2 = \frac{1}{\Lambda}. \quad (19)$$

$\nu_2^2 > 0$ impose $\Lambda > 0$ et donc

$$0 < \beta < \frac{B^2}{1 + B^2}. \quad (20)$$

La fonction elliptique d'amplitude sinus vaut 1 pour un angle de \mathbb{K} ($\operatorname{sn}(\mathbb{K}(\nu), \nu_2) = 1$), or $T(t_0) = 1 = \operatorname{sn}(\omega_2(t_0 - t_1), \nu_2)$, donc

$$t_1 = t_0 - \frac{\mathbb{K}(\nu)}{\omega_2}. \quad (21)$$

De (19) on obtient

$$\omega_2^2 = \frac{B^2}{(1 + B^2)(B^2 + \nu_2^2)}. \quad (22)$$

Solution $X^{(II)}$

On écrit (5) sous la forme

$$X_x = \sqrt{\beta\Lambda} \sqrt{(1 - X^2/B^2) \left(\frac{X^2}{B^2} - 1 + \left(1 - \frac{1}{\Lambda B^4} \right) \right)}. \quad (23)$$

On intègre entre x et L

$$\int_{X(L)/B}^{X(L)/B=1} \frac{d(X/B)}{\sqrt{(1 - X^2/B^2) \left(\frac{X^2}{B^2} - 1 + \left(1 - \frac{1}{\Lambda B^4} \right) \right)}} = \int_x^L \sqrt{\beta\Lambda} \, dx, \quad (24)$$

et donc d'après (3)

$$X(x) = B \operatorname{dn}(k_2(x - L), \mu_2), \quad k_2^2 = \beta\Lambda B^2, \quad \mu_2^2 = 1 - \frac{1}{\Lambda B^4}. \quad (25)$$

La condition $\mu_2^2 > 1$ impose $\Lambda B^4 > 1$, et donc

$$0 < \beta < \frac{B^4}{1 + B^2}. \quad (26)$$

En fait (20) et (26) s'accordent selon que B^2 est supérieur ou inférieur à 1.

$$B^2 > 1 : \quad 0 < \beta < \frac{B^2}{1 + B^2}, \quad (27)$$

$$B^2 < 1 : \quad 0 < \beta < \frac{B^4}{1 + B^2}. \quad (28)$$

De (25) on obtient

$$\beta = k_2^2 B^2 (1 - \mu_2^2), \quad k_2^2 = \frac{B^4}{(1 + B^2)(B^2 + \nu_2^2)}, \quad \mu_2^2 = 1 - \frac{\nu_2^2}{B^4}. \quad (29)$$

La solution recherchée est

$$u^{II}(x, t) = 4 \arctan[B \operatorname{dn}(k_2(x - L), \mu_2) \operatorname{sn}(\omega_2(t - t_1), \nu_2)]. \quad (30)$$

A.3 Solution $u^{(III)}$: $\alpha < 0$, $\Lambda B^4 < 1$ et $B^2 < 1$

Solution $T^{(III)} = T^{(II)}$

La solution $T(t)$ est la même que précédemment à savoir

$$T(t) = \operatorname{sn}(\omega_2(t - t_1), \nu_2), \quad (31)$$

où

$$\omega_2^2 = \beta \Lambda, \quad \nu_2^2 = \frac{1}{\Lambda}, \implies \beta = \omega_2^2 \nu_2^2, \quad (32)$$

avec la condition

$$0 < \beta < \frac{B^2}{1 + B^2}. \quad (33)$$

Solution $X^{(III)}$

On écrit (5) sous la forme

$$X_x = \sqrt{\beta \Lambda} \sqrt{(X^2/B^2 - 1)(1 - T^2(1 - \Lambda B^4))}. \quad (34)$$

On intègre entre x et L

$$\int_{X(L)/B=1}^{X(x)} \frac{d(X/B)}{\sqrt{(X^2/B^2 - 1)(1 - T^2(1 - \Lambda B^4))}} = \int_L^x \sqrt{\beta \Lambda} dx, \quad (35)$$

et donc d'après (4)

$$X(x) = B \operatorname{cn}(k_3(x - L), \mu_3), \quad k_3^2 = \frac{\beta}{B^2}, \quad \mu_3^2 = 1 - \Lambda B^4. \quad (36)$$

$\mu_3^2 > 1$ impose $\Lambda B^4 < 1$, soit avec (33)

$$\frac{B^4}{1+B^2} < \beta < \frac{B^2}{1+B^2}. \quad (37)$$

De (36) on obtient

$$\beta = k_3^2 B^2, \quad k_3^2 = \frac{\nu_2^2}{(1+B^2)(B^2+\nu_2^2)}, \quad \mu_3^2 = 1 - \frac{B^4}{\nu_2^2}. \quad (38)$$

La solution recherchée est

$$u^{III}(x, t) = 4 \arctan \left[\frac{B \operatorname{sn}(\omega_2(t - t_1), \nu_2)}{\operatorname{dn}(k_3(x - L), \mu_3)} \right]. \quad (39)$$

A.4 Paramètre B_1

On cherche les valeurs des paramètres ω_1 , ω_2 , k_1 , k_2 , ν_1 , ν_2 , μ_1 et $m\omega_2$, pour lesquelles, on a

$$u^I(x, t) = u^{II}(x, t), \quad (40)$$

soit,

$$\operatorname{cn}(k_1(x - L), \mu_1) \operatorname{cn}(\omega_1(t - t_0), \nu_1) = \operatorname{dn}(k_2(x - L), \mu_2) \operatorname{sn}(\omega_2(t - t_0) + \mathbb{K}(\nu_2), \nu_2), \quad (41)$$

or $\operatorname{sn}(u + \mathbb{K}) = \frac{\operatorname{cn}(u)}{\operatorname{dn}(u)}$, et donc

$$\operatorname{cn}(k_1(x - L), \mu_1) \operatorname{cn}(\omega_1(t - t_0), \nu_1) = \operatorname{dn}(k_2(x - L), \mu_2) \frac{\operatorname{cn}(\omega_2(t - t_0), \nu_2)}{\operatorname{dn}(\omega_2(t - t_0), \nu_2)}. \quad (42)$$

La seule solution est

$$\operatorname{cn}(k_1(x - L), \mu_1) = \operatorname{dn}(k_2(x - L), \mu_2), \leftrightarrow k_1 = k_2 = 0, \implies \omega_1^2 = \omega_2^2 = \frac{1}{1+B_1^2}, \quad (43)$$

$$\operatorname{cn}(\omega_1(t - t_0), \nu_1) = \frac{\operatorname{cn}(\omega_2(t - t_0), \nu_2)}{\operatorname{dn}(\omega_2(t - t_0), \nu_2)}, \iff \nu_1 = \nu_2 = 0, \rightarrow \mu_1^2 = \mu_2^2 = 1, \quad (44)$$

car

$$\operatorname{cn}(u, 0) = \cos(u), \quad (45)$$

$$\operatorname{dn}(u, 0) = 1, \quad (46)$$

$$\operatorname{cn}(0, m) = 1, \quad (47)$$

$$\operatorname{dn}(0, m) = 1. \quad (48)$$

La condition de synchronisation (2.19)

$$\Omega \mathbb{K}(\nu) = \frac{\pi}{2} \omega, \quad (49)$$

donne, en sachant $\mathbb{K}(0) = \pi/2$, on obtient

$$B_1 = \frac{\sqrt{1 - \Omega^2}}{\Omega}. \quad (50)$$

A.5 Paramètre B_0

De même, on cherche les valeurs des paramètres $\omega_1, \omega_2, k_2, k_3, \nu_1, \nu_2, \mu_2$ et μ_3 , pour lesquelles, on a

$$u^{II}(x, t) = u^{III}(x, t). \quad (51)$$

Soit

$$\operatorname{dn}(k_2(x - L), \mu_2) = \frac{1}{\operatorname{dn}(k_3(x - L), \mu_3)}. \quad (52)$$

La seule solution est

$$\mu_2 = \mu_3 = 0, \implies \nu_2 = \nu_3 = B_0^2. \quad (53)$$

La condition de synchronisation (2.19) donne

$$\Omega \mathbb{K}(B_0^2) = \frac{\pi}{2(1 + B_0^2)}. \quad (54)$$

Bibliographie

- [1] G. COSTABILE, R.D. PARMENTIER, B. SAVO, D.W. McLAUGHLIN, A.C. SCOTT, *Appl Phys Lett*, **32**, 587 (1978).
- [2] O.M. BRAUN, YU. S. KIVSHAR, *The Frenkel-Kontorova Model : Concepts, Methods, and Applications*, Berlin Springer-Verlag, (2004).
- [3] DEUX FILM MONTRANT LA BISTABILITÉ DANS LA CHAÎNE DE PENDULE. LE PREMIER FORCÉ AVEC UNE FRÉQUENCE PRISE POUR L'UN, DANS LA BANDE INTERDITE ET POUR L'AUTRE DANS LA BANDE PASSANTE. : <http://www.lpta.univ-montp2.fr/users/leon/Bistable/>.
- [4] H.G. WINFUL , J.H. MARBURGER ET E. GARMIRE, *Appl. Phys. Lett.*, **35**, 379-381 (1979).
- [5] H.G. WINFUL , R. ZAMIR ET S. FELDMAN , *Appl. Phys. Lett.*, **58**, 1001-1003 (1991).
- [6] P.F. BYRD ET M.D. FRIEDMAN, *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists*, Springer (Berlin 1954)

Chapitre 3

Réseau de jonctions Josephson

1 Introduction

Depuis quelques années, la bistabilité induite par la nonlinéarité a permis de concevoir des dispositifs tels que des détecteurs ultra-sensibles, des switches, des amplificateurs et des mémoires permanentes. En 1986, des simulations numériques de l'équation de SG amortie [1], modélisant les jonctions Josephson longues, soumises à une irradiation, ont démontré l'existence d'un comportement de bistabilité. Cela a été étendu plus tard, au réseau de jonctions tunnels courtes supraconductrices, couplées à l'aide de fils supra-conducteurs [2], appelé réseau de jonctions Josephson parallèles [3]. Grâce à une analyse perturbative, une interprétation de la bistabilité nonlinéaire dans ce contexte a été faite [4], mais aucune description analytique permettant de comprendre le phénomène n'était encore disponible.

On apportera ici une complète description analytique du comportement de bistabilité dans un réseau de jonctions Josephson. En particulier, on verra la possibilité de prédire à partir de quand, le système absorbe de l'énergie et bifurque d'un état de faible transmission vers un état d'intense transmission.

Dans ce chapitre, on applique donc la bistabilité nonlinéaire au réseau de jonctions Josephson décrit par SG discrète [3]. Ce système a la particularité de posséder un gap *électronique*, dont l'intensité d'entrée source jouera le rôle de l'amplitude de forçage de la chaîne. Ainsi, pour un courant d'entrée source périodique avec une fréquence prise dans le gap, le milieu sera réflecteur. Autrement dit, le système se trouvera dans un état de faible transmission et aura donc une intensité de sortie très faible. Au contraire, si l'intensité devient suffisante en atteignant le seuil de supratransmission, de l'énergie sera envoyée dans le réseau et le système bifurquera sur un état d'intense courant de sortie.

On souhaite donc forcer ce système, avec une fréquence prise dans la bande interdite, et avec une intensité d'entrée, modulée entre le seuil de supratransmission qui déclenche une forte intensité de sortie et le seuil d'extinction qui

rétablit un faible courant de sortie. Si la modulation s'effectue juste en-dessous de ces deux seuils, le moindre signal surimposé déclenchera la supratransmission et continuera jusqu'à l'arrêt de celui-ci, provoquant en même temps, le retour du système à son état initial de faible transmission. Ainsi, on montre la possibilité de réaliser un amplificateur digital grâce aux propriétés de bistabilité nonlinéaire que possède un réseau de jonctions Josephson.

2 Réseau de jonctions Josephson

2.1 Introduction

On considère un réseau de jonctions Josephson unidimensionnel comme schématisé sur la figure (3.1), c'est-à-dire un ensemble de N jonctions Josephson courtes mises en parallèle, couplées par des fils supraconducteurs. On utilise ici

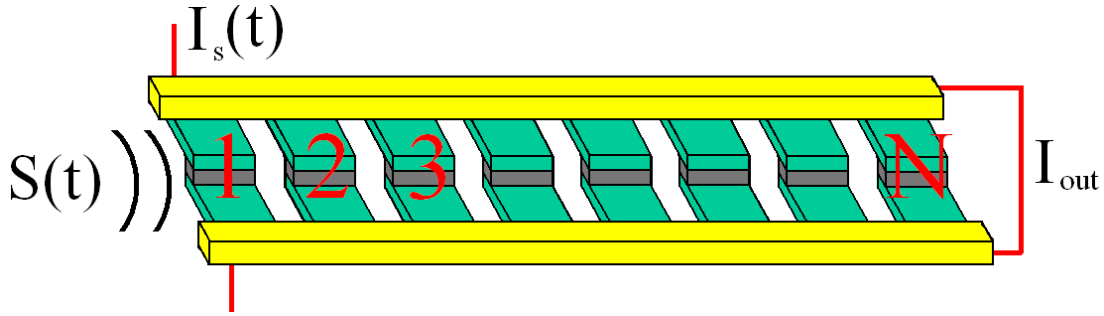


FIG. 3.1 – Réseau de jonctions Josephson parallèles

le réseau de jonctions Josephson pour concevoir un détecteur ultra-sensible de signal. Le réseau est soumis au courant rf source $I_s(t)$ dont la fréquence est prise dans la bande interdite. On définit le signal $S(t)$ comme le signal pouvant être détecté et I_{out} est la mesure de courant rf de sortie du réseau.

Après un bref rappel de la physique décrivant les jonctions Josephson, on établira le modèle SG discret décrivant le réseau de jonctions Josephson.

2.2 Courant Josephson

Une jonction Josephson est la réunion de deux supraconducteurs, séparés par une mince couche isolante, comme sur la figure (3.2). L'isolant représente une barrière de potentiel que les électrons peuvent franchir par effet tunnel [5], à condition que la couche ne soit pas trop épaisse, soit environ 10\AA .

A basse température, deux électrons de spin $1/2$ et de moment opposé peuvent s'apparier pour former un boson de spin entier 1, appelé paire de Cooper. Ces paires étant des bosons, ils peuvent condenser sur le même état quantique. Un

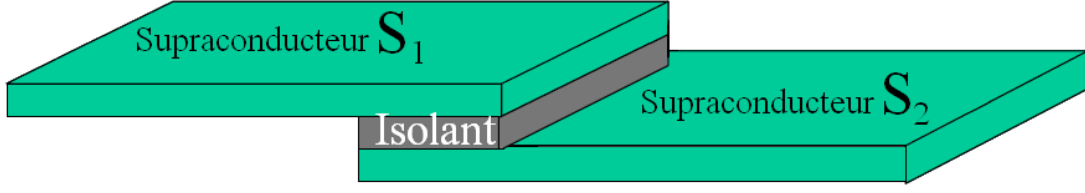


FIG. 3.2 – Schéma d'une jonction Josephson. Elle est constituée de deux supraconducteurs S_1 et S_2 séparés par une mince couche d'isolant.

supraconducteur peut alors être décrit par la seule fonction d'ondes macroscopique

$$\Psi = \sqrt{\rho}e^{i\phi}, \quad (3.1)$$

où ρ est la densité de porteurs par unité de surface dans le supraconducteur et ϕ la phase commune à toutes les paires de Cooper. Suivant l'approche de Feynman [6], on considère le cas de deux supraconducteurs S_1 et S_2 avec pour fonction d'ondes, respectivement, Ψ_1 et Ψ_2 . Les supraconducteurs étant assez proches, il existe un recouvrement de leurs fonctions d'ondes qui satisfait alors, au système linéaire d'équations de Schrödinger couplées, suivant

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = E_1 \Psi_1 + K \Psi_2, \quad (3.2)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = E_2 \Psi_2 + K \Psi_1, \quad (3.3)$$

où $\hbar = 2\pi\hbar$ est la constante de Planck. E_1 et E_2 sont les états d'énergie des paires de Cooper dans les supraconducteurs S_1 et S_2 . K est un coefficient réel qui décrit le couplage d'interaction entre les deux supraconducteurs et qui dépend de la structure de la jonction. En l'absence de différence de potentiel appliquée à travers la jonction, les états d'énergie E_1 et E_2 sont égaux. Si, au contraire, on applique maintenant une différence de potentiel V à travers la jonction, on a une différence d'énergie $E_1 - E_2 = 2eV$, où $2e$ est la charge d'une paire de Cooper, soit deux fois celle d'un électron. En prenant le zéro d'énergie à mi-chemin entre E_1 et E_2 , c'est-à-dire $E_1 = eV$ et $E_2 = -eV$, (3.2) et (3.3) deviennent

$$i\hbar \frac{d\Psi_1}{dt} = eV \Psi_1 + K \Psi_2, \quad (3.4)$$

$$i\hbar \frac{d\Psi_2}{dt} = -eV \Psi_2 + K \Psi_1. \quad (3.5)$$

On montre en annexe (p.79) que les équations (3.4) et (3.5) décrivent la variation de densité des porteurs, à savoir

$$\dot{\rho}_1 = -\dot{\rho}_2 = -\frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \theta, \quad (3.6)$$

où ρ_1 est la densité de porteurs de S_1 et ρ_2 la densité de porteurs de S_2 . Le passage des paires de Cooper à travers l'isolant entraîne l'existence d'une densité de courant I passant du supraconducteur S_1 au supraconducteur S_2 , on a donc

$$I = -2e\dot{\phi}_1 = 2e\dot{\phi}_2 = I_c \sin \theta, \quad (3.7)$$

où $I_c = -4eK\sqrt{\rho_1\rho_2}/\hbar$ est la densité de courant critique. Il faut noter que la variable importante pour décrire le système est la différence de phases $\theta = \phi_1 - \phi_2$, entre la phase ϕ_1 de la jonction S_1 et la phase ϕ_2 de la jonction S_2 . Les deux supraconducteurs sont généralement identiques, rendant le système symétrique, et leurs densités de porteurs sont alors quasiment égales $\rho_1 \simeq \rho_2$. En appendice (p.79), on montre que la différence de potentiel V à travers la jonction peut alors s'écrire

$$V = \frac{\hbar}{2e} \dot{\theta}. \quad (3.8)$$

2.3 Modèle SG

Une Jonction Josephson a le comportement électrique d'une inductance non-linéaire (Scott 1969), en parallèle avec une capacité et une résistance représentant les effets dissipatifs. Le modèle RCSJ (*Resistively and Capacitively Shunted Junction*) représente une jonction Josephson ponctuelle et idéale, court-circuitée par une résistance R et une capacité C [7]. On peut représenter le réseau de jonctions Josephson parallèles par le schéma électrique équivalent de la figure (3.3).

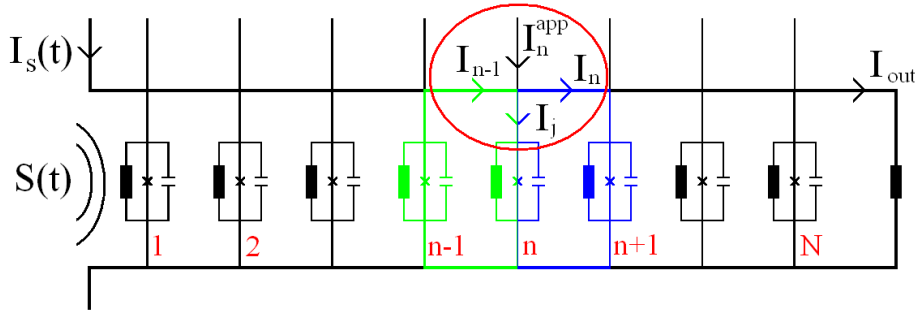


FIG. 3.3 – Schéma du réseau de jonctions Josephson parallèles. Les croix représentent les jonctions Josephson idéales.

La densité de courant I_j de la jonction n est alors la somme, du courant Josephson traversant la jonction, du courant résistif et du courant capacitif, soit

$$I_j = C\dot{V}_n + \frac{V_n}{R} + I_c \sin \theta_n. \quad (3.9)$$

Pour établir le modèle du réseau de jonctions Josephson parallèles, on suit la méthode proposée en [3]. La première loi de Kirchhoff, appliquée au nœud

entouré en rouge, donne

$$I_{n-1} + I_n^{app} = I_n + I_j. \quad (3.10)$$

On rappelle que le flux magnétique Φ est défini par

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -L_s \frac{dI}{dt}, \quad (3.11)$$

où L_s est ici l'inductance due aux fils supraconducteurs. La seconde loi de Kirchhoff et (3.8), appliquées à la boucle en vert et à la boucle en bleu sur la figure (3.3), donnent

$$I_{n-1} = \frac{\Phi_n - \Phi_{n-1}}{L_s} = \frac{\hbar (\theta_n - \theta_{n-1})}{2eL_s}, \quad (3.12)$$

$$I_n = \frac{\Phi_{n+1} - \Phi_n}{L_s} = \frac{\hbar (\theta_{n+1} - \theta_n)}{2eL_s}.$$

Les équations (3.9), (3.10), (3.11) et (3.12) donnent

$$\frac{\hbar C}{2e} \ddot{\theta}_N + \frac{\hbar C}{2eR} \dot{\theta} - \frac{\hbar C}{2eL_s} [\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n] + I_c \sin \theta_n = I_n^{app}. \quad (3.13)$$

On normalise, en posant $\theta(\omega_p t) = u(t)$, où $\omega_p = 1/\sqrt{L_j C}$ est la fréquence plasma, et $L_j = \hbar/(2eI_c)$ est l'inductance Josephson. On obtient alors l'équation SG discrète

$$\ddot{u}_N + \gamma \dot{u}_n - \lambda_j^2 [u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n] + \sin u_n = \frac{I_n^{app}}{I_c}, \quad (3.14)$$

où le paramètre $\lambda_j^2 = L_j/L_s$, et $\gamma = \sqrt{\hbar/(2eI_c R^2 C)}$ est le paramètre d'amortissement.

2.4 Réseau de jonctions couplées

La première cellule de notre réseau est soumise au courant $f(t) = I_1^{app}/I_c$ normalisé au courant critique de Josephson I_c . Les cellules de $n = 2$ à $n = N - 1$ ne sont soumises à aucun courant, et donc $I_l^{app} = 0$ pour $l = 2..N - 1$. Le modèle décrivant le réseau présenté en figure (3.3) est donc le suivant

$$\ddot{u}_1 + \gamma \dot{u}_1 - \lambda_j^2 [u_2 - u_1] + \sin u_1 = f(t), \quad (3.15)$$

$$\ddot{u}_n + \gamma \dot{u}_n - \lambda_j^2 [u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n] + \sin u_n = 0, \quad n = 2, \dots, N - 1, \quad (3.16)$$

$$\ddot{u}_N + \gamma \dot{u}_N - \lambda_j^2 [u_{N-1} - u_N] + \sin u_N = -I_{out}, \quad (3.17)$$

où $I_{out} = -I_N^{app}/I_c$ est le courant de sortie normalisé au courant critique I_c . Le moins provient du fait que le courant I_{out} est sortant et non pas entrant. L'addition d'une résistance aux bornes de la dernière jonction N permet, en

mesurant la tension V_{out} aux bornes de la résistance, de connaître l'intensité I_{out} par l'intermédiaire de la loi d'Ohm $V_{\text{out}} = RI_{\text{out}} = \dot{u}_n$, et (3.17) devient alors

$$\ddot{u}_N + \left(\gamma + \frac{1}{R} \right) \dot{u}_N - \lambda_J^2 [u_{N-1} - u_N] + \sin u_N = 0. \quad (3.18)$$

Dans les expériences typiques sur les réseaux de jonctions Josephson, comme dans [3], les paramètres ont les valeurs suivantes : $R \approx 100\Omega$, $C \approx 300\text{fF}$, $I_c \approx 10\mu\text{A}$, $L_S \approx \text{pH}$, $\gamma \approx 0.1$ et enfin $\lambda_J \approx 3$. En changeant la densité du courant critique et la température, on peut facilement contrôler les deux paramètres γ et λ_J . On choisira alors d'utiliser les valeurs $\lambda_J = 2$, $\gamma = 0.01$ dans les simulations numériques.

Le courant $f(t)$ représente le forçage du système et est constitué du courant source périodique $I_s(t) = A \sin(\Omega t)$ où la fréquence Ω est prise dans le gap, et du signal surimposé $S(t)$

$$f(t) = I_s(t) + S(t). \quad (3.19)$$

En l'absence de signal $S(t)$, le système est dans un état de faible transmission de sortie. En présence du signal $S(t)$, le système doit bifurquer vers un état intense de sortie. Cela implique, que le courant source $I_s(t)$ soit suffisamment proche du seuil de supratransmission, pour que le moindre signal surimposé $S(t)$, provoque le dépassement par $f(t)$ du seuil de supratransmission. On peut d'ailleurs choisir le seuil de détection, le plus faible possible, en travaillant de plus en plus près du seuil de supratransmission.

La présence du signal externe $S(t)$ modifie généralement le courant source $I_s(t)$ et la définition de $f(t)$ n'est donc pas exacte. Cependant, on considère que le signal $S(t)$ est assez faible pour ne pas trop perturber le courant source I_s .

Il est judicieux de définir deux jonctions virtuelles en $n = 0$ et $n = N + 1$ en posant

$$u_0 - u_1 \equiv f(t), \quad u_{N+1} - u_N \equiv 0. \quad (3.20)$$

Ainsi, dans la limite des milieux continus, le système d'équations (3.15), (3.16) et (3.18) devient, pour λ_j assez grand, l'équation SG continue amortie

$$x \in [0, L] : u_{tt} + \delta u_t - u_{xx} + \sin u = 0, \quad (3.21)$$

où on a défini les variables $x = n/\lambda_J$ et $\delta = \gamma + 1/R$. Afin que δ reste de l'ordre de γ , la résistance R doit être assez grande pour garantir l'accord avec nos simulations. Pour des valeurs de R plus petites, le phénomène observé sera le même, seul l'accord avec les simulations sera moins probant.

On associe à (3.21) les conditions de bords de Neumann, qui s'écrivent, d'après (3.20)

$$u_x(0, t) = -f(t)/\lambda_J, \quad u_x(L, t) = 0, \quad (3.22)$$

avec un état initial $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$.

Cette version continue est aussi valable pour une jonction Josephson longue, dans laquelle l'extrémité en $x = 0$ est soumise à une irradiation externe et où $f(t)$ joue alors le rôle de l'intensité du champ magnétique externe [8].

3 Solutions

On souhaite décrire les régimes périodiques asymptotiques, des systèmes de réseaux de jonctions Josephson. Pour cela, on cherche une solution de (3.21) avec $\delta = 0$, soumis aux conditions de bords de Neumann (3.22), où $f(t)$ a une structure périodique

$$f(t) = A \sin(\Omega t), \quad \Omega < 1, \quad (3.23)$$

sous la forme générale $u(x, t) = 4 \arctan[X(x)T(t)]$.

Les solutions qui permettent, alors, de décrire ces régimes périodiques asymptotiques sont bien entendu, les solutions u^I, u^{II} et u^{III} calculées en annexe (p.55) et présenté auparavant, pour décrire les états stationnaires dans la chaîne de pendules courte.

Le produit $X(x)T(t)$, nous permet de choisir une normalisation arbitraire. On échelonnera donc la fonction $T(t)$ sur une période, tel que

$$\max_t |T(t)| = 1. \quad (3.24)$$

Le problème de valeurs aux bords (3.22) est résolu en exigeant l'adaptation aux conditions de forçage (3.23)

$$\max_t |u_x(0, t)| = \frac{1}{\lambda_j} \max_t |A \sin(\Omega t)| \iff \frac{A}{\lambda_j} = \frac{4X'(0)}{1 + X(0)^2}, \quad (3.25)$$

et la synchronisation

$$T\left(t + \frac{2\pi}{\Omega}\right) = T(t). \quad (3.26)$$

Les conditions de bords de Neumann $u_x(L, t) = 0$ s'écrivent

$$X_x(L) = 0, \quad X(L) = B, \quad (3.27)$$

où B est le paramètre d'amplitude inconnu qui détermine les trois fonctions $u(x, t)$ solutions pour une longueur L et une fréquence Ω données

$$\begin{aligned} u^I(x, t) &= 4 \arctan[B \operatorname{cn}(k_1(x - L), \mu_1) \operatorname{cn}(\omega_1(t - t_0), \nu_1)], & B > B_1, \\ u^{II}(x, t) &= 4 \arctan[B \operatorname{dn}(k_2(x - L), \mu_2) \operatorname{sn}(\omega_2(t - t_1), \nu_2)], & B \in [B_0, B_1], \\ u^{III}(x, t) &= 4 \arctan\left[\frac{B \operatorname{sn}(\omega_2(t - t_1), \nu_2)}{\operatorname{dn}(k_3(x - L), \mu_3)}\right], & B < B_0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

où

$$B_1 = \frac{\sqrt{1 - \Omega^2}}{\Omega}, \quad \Omega \mathbb{K}(B_0^2) = \frac{\pi}{2(1 + B_0^2)}. \quad (3.29)$$

Les autres paramètres sont tous fonctions de B et de $\nu_{1,2}$

$$\omega_1^2 = \frac{B^2}{1 + B^2} \frac{1}{B^2 - \nu_1^2(1 + B^2)}, \quad \omega_2^2 = \frac{B^2}{(1 + B^2)(B^2 + \nu_2^2)}, \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{1}{1 + B^2} \frac{B^4(1 - \nu_1^2) + \nu_1^2}{B^2 - \nu_1^2(1 + B^2)}, & \mu_1^2 &= \frac{B^4(1 - \nu_1^2)}{B^4(1 - \nu_1^2) + \nu_1^2}, \\ k_2^2 &= \frac{B^4}{(1 + B^2)(B^2 + \nu_2^2)}, & \mu_2^2 &= 1 - \frac{\nu_2^2}{B^4}, \\ k_3^2 &= \frac{\nu_2^2}{(1 + B^2)(B^2 + \nu_2^2)}, & \mu_3^2 &= 1 - \frac{B^4}{\nu_2^2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

La condition de synchronisation (3.26) impose

$$\Omega \mathbb{K}(\nu_{1,2}) = \frac{\pi}{2} \omega(\nu_{1,2}). \quad (3.32)$$

Ainsi la donnée de B , Ω et L détermine de manière unique la solution $u^j(x, t)$. En effet, la donnée de B et Ω permet de déterminer de quelle solution on a besoin grâce à (3.29). Ensuite, on cherche $\nu_{1,2}$, à l'aide de (3.30) et (3.32). Les paramètres k_j et μ_j restants étant déterminés par ν et B , on a la solution complète recherchée avec la donnée de L .

On trace sur la figure (3.4) gauche la comparaison entre les profils des solutions u^{II} et u^{III} et le résultat de simulations numériques du modèle sine-Gordon (3.21) avec les conditions de bords (3.22), pour une intensité de forçage $A = 0.1$ et une fréquence $\Omega = 0.9$.

La figure (3.4) droite représente la *RMS* (Root Mean Square : racine de la valeur du carré moyen) du courant Josephson défini par

$$\langle I \rangle (x) = \left(\frac{1}{T} \int_0^T dt \sin^2 u(x, t) \right)^{1/2}, \quad (3.33)$$

où T est, dans les deux régimes, la période de forçage $2\pi/\Omega$. Sur un voltmètre, la valeur RMS est obtenue grâce à un filtrage qui élimine la composante continue (valeur moyenne) de la tension, et permet d'obtenir la valeur efficace de l'ondulation (valeur efficace RMS) de la tension.

Les figures sont obtenues en prenant la valeur maximale de $u(x, t)$, sur une période, des solutions analytiques et des simulations numériques. La figure (3.4) droite, montre en fait, la valeur moyenne de l'intensité dans le réseau à la distance x . Il est donc important de noter la grande différence d'intensité RMS

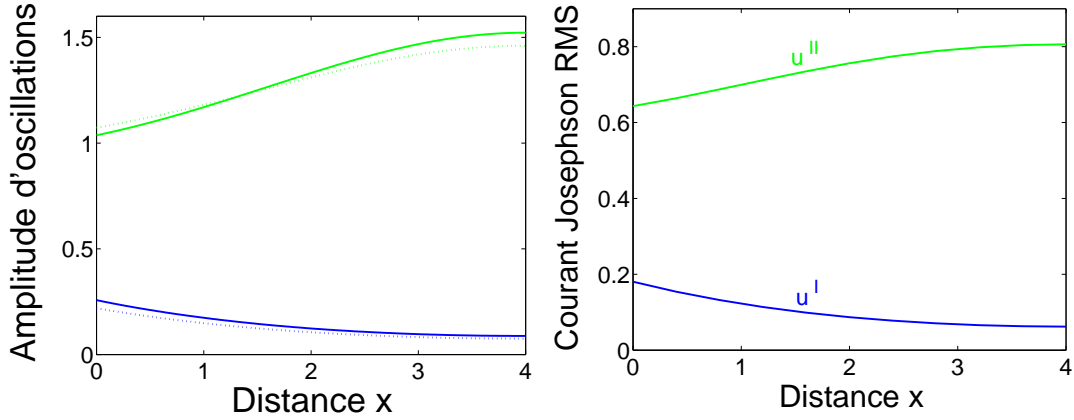


FIG. 3.4 – Résultat de simulations numériques en trait plein de (3.21) avec les conditions (3.22) pour une amplitude source $A = 0.1$, une fréquence $\Omega = 0.9$ et une longueur $L = 4$. Les lignes en pointillés représentent les solutions analytiques (3.28). La figure de droite présente le courant RMS défini en (3.33).

dans la dernière jonction en $x = L$, pour les deux régimes [9]. L'amortissement δ permet aux solutions de se bloquer sur les régimes stationnaires. Il est remarquable de constater que les solutions obtenues numériquement coïncident assez précisément avec les solutions particulières u^{II} et u^{III} , permettant ainsi de vérifier notre complète connaissance des bases analytiques du processus de bistabilité.

4 Boucle d'hystérésis

En utilisant les solutions (3.28) et les conditions d'adaptation (3.25), on obtient les trois fonctions donnant l'amplitude de forçage A en fonction du paramètre B

$$B_1 < B, \quad A = 4\lambda_J \frac{\partial}{\partial L} \arctan [B \operatorname{cn}(k_1 L, \mu_1)], \quad (3.34)$$

$$B \in [B_0, B_1], \quad A = 4\lambda_J \frac{\partial}{\partial L} \arctan [B \operatorname{dn}(k_2 L, \mu_2)], \quad (3.35)$$

$$B < B_0, \quad A = 4\lambda_J \frac{\partial}{\partial L} \arctan [B / \operatorname{dn}(k_3 L, \mu_3)], \quad (3.36)$$

où les paramètres k_j et μ_j sont donnés en fonction de B dans (3.31). L'écriture des solutions sous la forme (3.25) est lourde et sans grand intérêt, on a donc choisi une forme plus explicite. Ces solutions sont obtenues avec la considération, que la dérivée de $u(x, t)$ par rapport à x , évaluée en $x = 0$, est équivalente à la dérivée de $u(x, t)$ pour $x = 0$ par rapport à L . En inversant les expressions ci-dessus pour une amplitude A donnée, on peut tracer l'amplitude de sortie $a = 4 \arctan(B)$ en

fonction de l'amplitude de forçage d'entrée A . La figure (3.5) présente le résultat de simulations numériques du système (3.21) en comparaison avec le diagramme d'hystérésis obtenu à partir des solutions analytiques suivant la méthode que l'on vient de décrire.

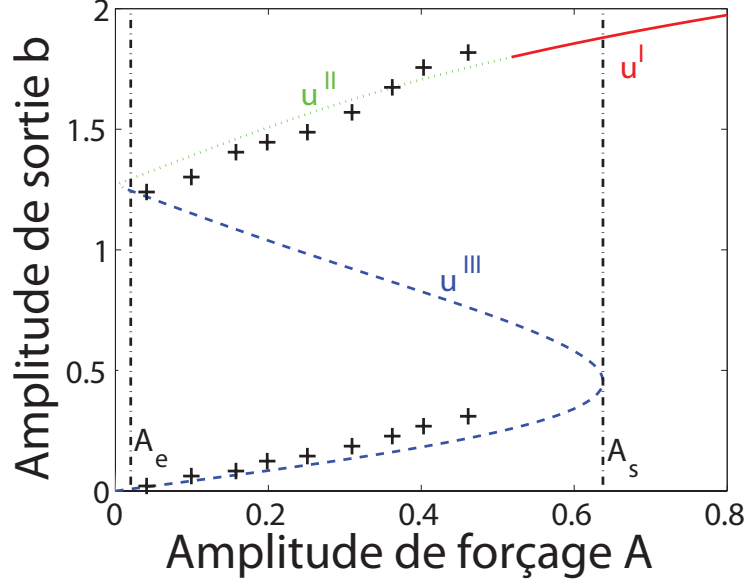


FIG. 3.5 – Tracé du diagramme d'hystérésis pour une fréquence $\Omega = 0.9$ et une longueur $L = 4$. Les croix indiquent le résultat de simulations numériques du système (3.21) avec les conditions (3.22), obtenues pour différentes valeurs d'amplitude de forçage A .

Bien que les solutions analytiques proviennent d'un modèle continu, les simulations sont en très bon accord avec les solutions stationnaires. En pratique, le système se bloque, tout d'abord, sur la solution analytique u^{III} pour une intensité sous le seuil de supratransmission. Ensuite, pour une intensité suffisante, le système bifurque, tout d'abord, sur la solution u^I et, à cause de l'amortissement, redescend sur la solution u^{II} . Le saut dans la boucle d'hystérésis se produit lorsque l'on dépasse le seuil de supratransmission A_s , défini ici comme la valeur maximale que peut prendre A dans la fonction (3.36). Ce seuil est évalué numériquement et tracé sur la figure (3.6).

On détermine maintenant le seuil de supratransmission, dans le cas de la ligne infinie ($L \rightarrow \infty$) et dans les conditions de Neumann [10]. Le système s'adapte, dans ces conditions, à la dérivée du Breather u_b (1.24) centré en x_0

$$\partial_x u_b|_{x=0} = 4\lambda_j \frac{\lambda^2}{\Omega} \frac{\cos(\Omega t) \sinh(\lambda x_0)}{\cosh^2(\lambda x_0) + (\lambda^2/\Omega^2) \cos^2(\Omega t)}, \quad (3.37)$$

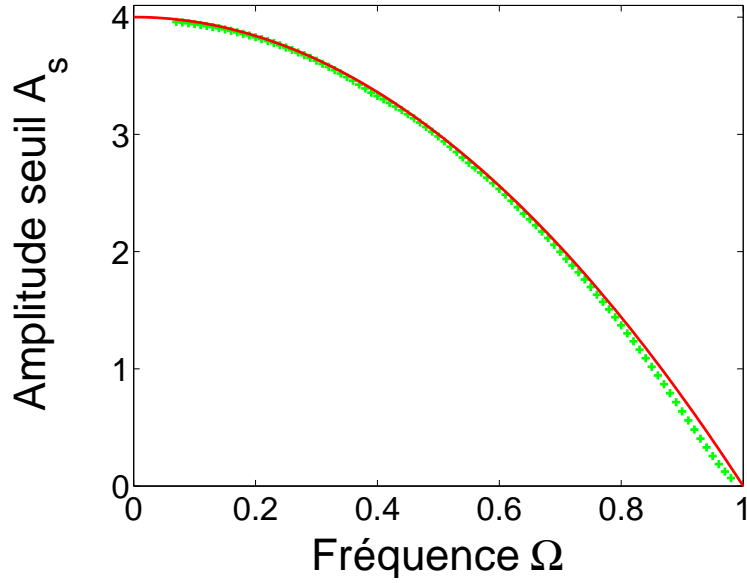


FIG. 3.6 – Seuil de supratransmission A_s (croix vertes) évalué numériquement en fonction de la fréquence de forçage Ω . La ligne rouge représente le seuil donné en (3.39) pour la ligne $L \rightarrow \infty$.

avec $c = 1$ et où λ est défini en (1.11). Le coefficient λ_j provient des conditions de bords (3.22).

Le seuil de supratransmission A_s est obtenu pour la valeur maximale de la dérivée du Breather. L'expression (3.37) a un maximum pour $x_0 = x_m$ défini par

$$\sinh^2(\lambda x_m) = 1 + \frac{\lambda^2}{\Omega^2}. \quad (3.38)$$

La relation de dispersion linéaire $\Omega^2 + \lambda^2 = 1$ et (3.38) donnent la valeur maximale sur une période de l'expression (3.37), soit

$$A_s = 2\lambda_j(1 - \Omega^2). \quad (3.39)$$

Ce seuil de supratransmission est tracé en rouge sur la figure (3.36) en fonction de la fréquence de forçage Ω . Il est remarquable de constater que le seuil de supratransmission de la ligne infinie (3.39) coïncide raisonnablement bien avec le seuil évalué numériquement dans le cas $L = 4$, l'accord étant de plus en plus probant pour de plus grandes valeurs de L .

5 Amplificateur digital

On montre tout d'abord, que les réseaux de jonctions Josephson parallèles, sont des dispositifs capables de détecter des signaux extrêmement faibles grâce

aux propriétés de bistabilité nonlinéaire. Ensuite, en utilisant cette capacité de détection couplée à une modulation de l'intensité source, on proposera la réalisation d'un amplificateur digital.

5.1 Détecteur ultra-sensible

On choisit comme définition de (3.19)

$$I_s(t) = A \sin \Omega t, \quad S(t) = \frac{\alpha}{\cosh[\beta(t - t_0)]}. \quad (3.40)$$

Le courant source $I_s(t)$ a une fréquence dans la bande interdite ($\Omega < 1$) et son amplitude se situe juste en-dessous du seuil de supratransmission $A_s(\Omega)$. $S(t)$ est un signal très bref, localisé, permettant de faire bifurquer le système d'une intensité faible à une très large intensité de sortie. On résout numériquement le système (3.15),(3.16) et (3.18) pour un système constitué de huit jonctions parallèles. On envoie à $t = t_0$, un signal bref, afin de provoquer la bifurcation du système. Le résultat est tracé sur la figure (3.7).

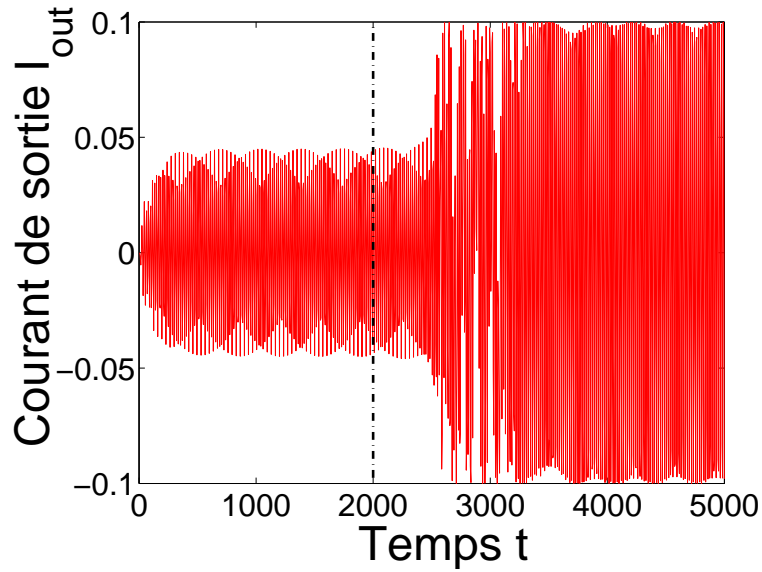


FIG. 3.7 – Tracé du courant de sortie en fonction du temps, dans la dernière jonction avec une résistance $R = 10\Omega$. L'excitation $f(t)$ est constituée ici d'une amplitude source $A = 0.65854025$, avec une fréquence $\Omega = 0.9$ et un signal $S(t) = 0.02/\cosh[0.005(t - 2000)]$. La droite en traits et points donne le temps $t_0 = 2000$ du signal bref $S(t)$.

Le signal $S(t)$ a permis de faire bifurquer le système, et on peut remarquer qu'il n'y a aucune condition de fréquence sur ce signal. Ainsi, tout type de signal

peut être détecté par ce dispositif, sans condition de fréquence à la différence de [11, 12], où la fréquence du signal surimposé doit être identique à celle de la source. Il est possible de diminuer le seuil de détection du signal $S(t)$ en travaillant de plus en plus près du seuil de supratransmission, ce qui justifie la dénomination de détecteur ultra-sensible.

5.2 Amplificateur digital

Comme dans le cas de la chaîne de pendules, il existe un seuil d'extinction A_e , révélé par les simulations numériques. On l'a, d'ailleurs, indiqué sur la figure (3.5). Ainsi, il est possible d'exciter le système en le forçant avec un courant source, dont l'amplitude dépasse le seuil de supratransmission A_s , et ensuite, de le ramener à un état non excité, en diminuant l'amplitude de forçage jusqu'au seuil d'extinction A_e .

On module donc le courant source entre le seuil de supratransmission A_s et le seuil d'extinction A_e , mais en étant juste en-dessous de ces deux seuils. Le système est donc dans un état de faible intensité de sortie. On définit donc le courant source de la manière suivante

$$I_s(t) = \frac{1}{2} \cos(\Omega t) [(A_2 - A_1) \sin(\lambda t) + A_2 + A_1]. \quad (3.41)$$

Si l'on est suffisamment proche du seuil de supratransmission, un signal $S(t)$, d'une durée supérieure à la modulation, entraîne la bifurcation du système vers un état d'intense courant de sortie. En fait, tant que le signal existe, le système reste dans cet état, puisque la modulation aura été déplacée au-dessus du seuil d'extinction. Par contre, dès l'arrêt du signal, et dès que l'on arrive au minimum de la modulation (sous le seuil A_e), le système retourne dans un état de faible intensité de sortie.

On compose donc le signal $S(t)$ d'un ensemble de séquences de faible amplitude de durée finie, avec une fréquence Ω . La durée de chaque signal doit excéder la période de modulation, pour permettre au système de bifurquer vers un état intense. De même, la durée entre deux signaux doit excéder la période de modulation, pour permettre au système de retourner dans l'état de faible intensité. On donne un exemple, en utilisant le modèle analytique d'une séquence de plusieurs signaux

$$S(t) = \alpha \cos(\Omega t) [F(t_1, t_2) + F(t_3, t_4) + F(t_5, t_6) + \dots], \quad (3.42)$$

où

$$F(t_i, t_j) = \theta(t - t_i) - \theta(t - t_j), \quad (3.43)$$

et θ est la distribution de Heaviside.

On a effectué des simulations numériques du système (3.15), (3.16) et (3.18) pour huit jonctions, avec un amortissement $\delta = 0.03$ et une résistance $R = 10 \, \Omega$.

Les paramètres utilisés pour le courant source sont

$$\lambda = 0.01, \quad A_1 = 0.335, \quad A_2 = 0.690, \quad \Omega = 0.9, \quad (3.44)$$

et pour le signal,

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.005, \\ t_1 &= 1200, \quad t_2 = 2200, \quad t_3 = 3700, \quad t_4 = 5300, \\ t_5 &= 6800, \quad t_6 = 7200, \quad t_7 = 8100, \quad t_8 = 10400. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Le seuil d'extinction A_e est directement relié aux effets de l'amortissement. Ainsi, plus δ est important, plus le seuil d'extinction sera élevé. Ici, on a choisi un amortissement trois fois plus important que lors des simulations de la figure (3.5), c'est pour cette raison que le seuil d'extinction est de l'ordre de 0.33 et non de 0.02 comme auparavant. On a tracé, sur la figure (3.8), la modulation du courant source $I_s(t)$, ainsi que le signal $S(t)$.

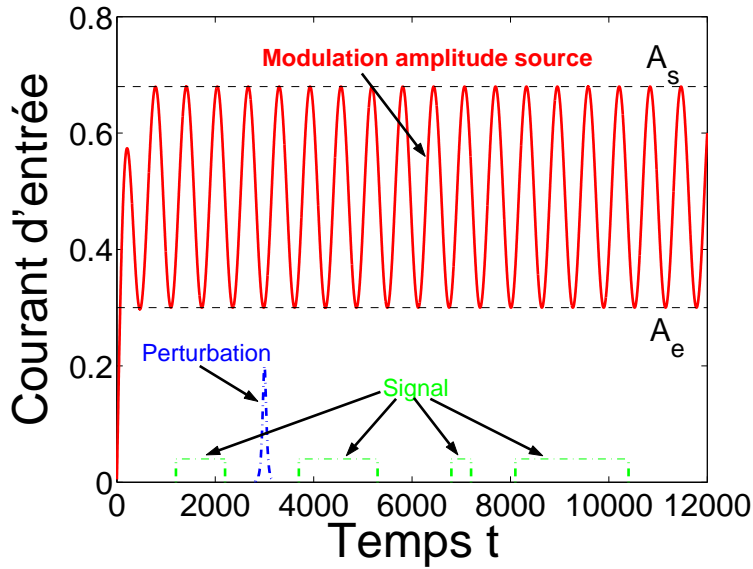


FIG. 3.8 – Tracé en rouge de la modulation de l'amplitude source (3.41) en fonction du temps. Les lignes vertes en pointillés représentent le signal $S(t)$ (3.42) et les lignes discontinues montrent le seuil de supratransmission et le seuil d'extinction. La courbe bleue en traits et points est une perturbation. L'amplitude des signaux et de la perturbation est tracée avec un facteur 10 pour être visible sur la figure.

La figure (3.9) présente, quant à elle, le courant de sortie du réseau $I_{out}(t)$, lorsque le réseau est soumis à un courant d'entrée, tel que celui tracé en figure (3.8).

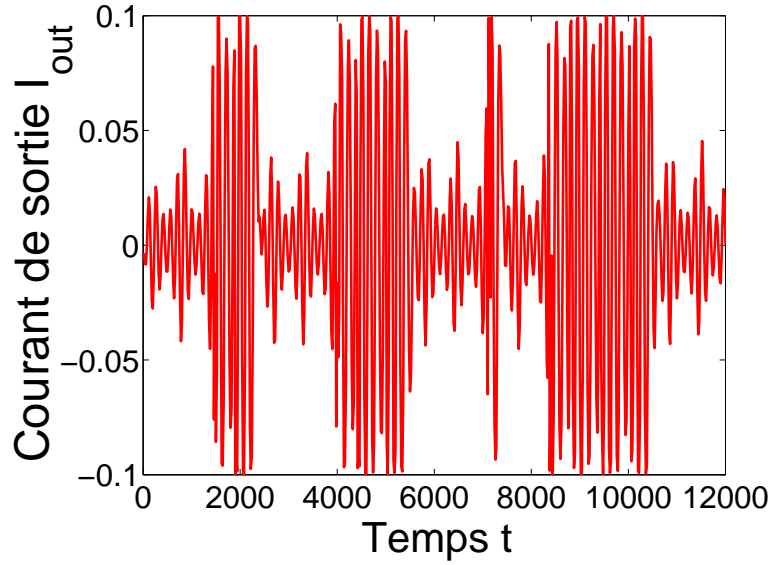


FIG. 3.9 – Courant de sortie I_{out} en fonction du temps.

Le fonctionnement du réseau parallèle de jonctions Josephson en qualité d'amplificateur digital est remarquable. On note même une efficacité d'amplification d'environ 20 (rapport entre I_{out} et le signal $S(t)$).

Afin de mesurer l'influence du bruit ou de fluctuations thermiques, on a introduit dans les simulations numériques, un signal de courte durée (n'excédant pas la durée d'une modulation). On a indiqué cette perturbation sur la figure (3.8). Le système semble vraiment imperturbable face à ce genre d'excitations. En effet, il ne réagit que pour des signaux excédant la durée d'une modulation. Seule une fluctuation, se produisant quand la modulation atteint son maximum, déclencherait une réponse du système. Il est donc assez peu probable d'avoir une bifurcation du système due à une fluctuation, et si tel était le cas, elle ne durerait qu'une demi-modulation.

6 Conclusion

On a maintenant une description analytique complète du comportement de bistabilité dans les réseaux de jonctions courtes, valable également pour les jonctions longues. Un des résultats intéressants est de pouvoir prédire le seuil d'amplitude du courant source, pour lequel le dispositif fonctionne en détecteur ultrasensible et cela, sans condition sur la fréquence du signal à détecter. Leur fonctionnement peut se faire dans une large gamme de fréquences (toute la bande interdite), sous réserve d'utiliser une amplitude de l'intensité source convenable. Cette capacité de détection donne aussi la possibilité de concevoir un amplifica-

teur digital, en modulant convenablement l'intensité source rf.

Si, dans le cas des réseaux de jonctions parallèles, on peut supposer que seule la première (ou les quelques premières) jonction est excitée par le signal externe émis par une antenne, au contraire, dans le cas des jonctions longues, la totalité de la jonction est excitée par le signal externe. Il peut être alors difficile dans ce cas, de séparer le courant d'entrée, du courant de sortie, comme on le fait dans les réseaux.

A Annexe : Densité de porteurs et potentiel

On rappelle les équations (3.4) et (3.5)

$$i\hbar \frac{d\Psi_1}{dt} = eV\Psi_1 + K\Psi_2, \quad (1)$$

$$i\hbar \frac{d\Psi_2}{dt} = -eV\Psi_2 + K\Psi_1. \quad (2)$$

On pose

$$\Psi_1 = \sqrt{\rho_1}e^{i\phi_1}, \quad \Psi_2 = \sqrt{\rho_2}e^{i\phi_2}. \quad (3)$$

On substitue (3) dans (1) et on multiplie par $\sqrt{\rho_1}$, il vient

$$i\hbar \left[\frac{1}{2} \frac{d\rho_1}{dt} e^{i\phi_1} + i\rho_1 \frac{d\phi_1}{dt} e^{i\phi_1} \right] = eV\rho_1 e^{i\phi_1} + K\sqrt{\rho_1\rho_2} e^{i\phi_2}. \quad (4)$$

On sépare parties réelle et imaginaire

$$\frac{\hbar}{2} \frac{d\rho_1}{dt} \cos \phi_1 - \hbar\rho_1 \frac{d\phi_1}{dt} \sin \phi_1 = eV\rho_1 \sin \phi_1 + K\sqrt{\rho_1\rho_2} \sin \phi_2, \quad (5)$$

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\rho_1}{dt} \sin \phi_1 - \hbar\rho_1 \frac{d\phi_1}{dt} \cos \phi_1 = eV\rho_1 \cos \phi_1 + K\sqrt{\rho_1\rho_2} \cos \phi_2. \quad (6)$$

On multiplie (5) par $\cos \phi_1$ et (6) par $-\sin \phi_1$, puis on effectue leur somme

$$\dot{\rho}_1 = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_1\rho_2} \sin \theta, \quad (7)$$

où $\theta = \phi_2 - \phi_1$. On effectue les mêmes étapes que précédemment pour (2). On substitue (3) dans (2) et on multiplie par $\sqrt{\rho_2}$, il vient

$$i\hbar \left[\frac{1}{2} \frac{d\rho_2}{dt} e^{i\phi_2} + i\rho_2 \frac{d\phi_2}{dt} e^{i\phi_2} \right] = -eV\rho_2 e^{i\phi_2} + K\sqrt{\rho_1\rho_2} e^{i\phi_1}. \quad (8)$$

On sépare parties réelles et imaginaires

$$\frac{\hbar}{2} \frac{d\rho_2}{dt} \cos \phi_2 - \hbar\rho_2 \frac{d\phi_2}{dt} \sin \phi_2 = -eV\rho_2 \sin \phi_2 + K\sqrt{\rho_1\rho_2} \sin \phi_1, \quad (9)$$

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\rho_2}{dt} \sin \phi_2 - \hbar\rho_2 \frac{d\phi_2}{dt} \cos \phi_2 = -eV\rho_2 \cos \phi_2 + K\sqrt{\rho_1\rho_2} \cos \phi_1. \quad (10)$$

On multiplie (9) par $\cos \phi_2$ et (10) par $-\sin \phi_2$, puis on effectue leur somme

$$\dot{\rho}_2 = -\frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_1\rho_2} \sin \theta. \quad (11)$$

Si on multiplie (5) par $\sin \phi_1$ et (6) par $\cos \phi_1$, puis si on effectue leur somme

$$\dot{\phi}_1 = -\frac{eV}{\hbar} - \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cos \theta. \quad (12)$$

De même, si on multiplie (9) par $\sin \phi_1$ et (10) par $\cos \phi_1$, puis, si on effectue leur somme

$$\dot{\phi}_2 = \frac{eV}{\hbar} - \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cos \theta. \quad (13)$$

Dans le cas $\rho_1 \simeq \rho_2$, la différence de (12) et (13) donne alors

$$\dot{\theta} = \frac{2eV}{\hbar}, \quad (14)$$

soit

$$V = \frac{\hbar}{2e} \dot{\theta}. \quad (15)$$

Bibliographie

- [1] O.H. OLSEN ET M.R. SAMUELSEN, *Phys. Rev. B*, **34**, 3510 (1986).
- [2] D. BARDAY ET M. REMOISSENET, *Phys. Rev. B*, **41**, 10387 (1990).
- [3] H.S.J. VAN DER ZANT, M. BARAHONA, A.E. DUWEL, T.P. ORLANDO, S. WATANABE ET S. STROGATZ, *Physica D*, **119**, 219 (1998)
- [4] Y.S. KIVSHAR, O.H. OLSEN ET M.R. SAMUELSEN, *Phys. Lett. A*, **168**, 391 (1992).
- [5] B.B.JOSEPHSON, *Physics Letters*, 251-253 (1962).
- [6] R.P. FEYNMAN, *Le cours de physique de Feynman*, **InterÉdition**, Paris (1979).
- [7] M.TINKHAM, *Introduction to Superconductivity*, McGraw Hill (1996)
- [8] A.V. USTINOV, J. MYGIND ET V.A. OBOZNOV, *J Appl Phys*, **72**, 1203 (1992); A.V. USTINOV, J. MYGIND, N.F. PEDERSEN ET V.A. OBOZNOV, *Phys Rev B*, **46**, 578 (1992).
- [9] R. KHOMERIKI ET J. LEON, *Phys. Rev. E*, **71**, 056620 (2005).
- [10] F. GENIET ET J. LEON, *J Phys Cond Matt*, **15**, 2933 (2003).
- [11] I. SIDDIQI, R. VIJAY, F. PIERRE, C.M. WILSON, L. FRUNZIO, M. METCALFE, C. RIGETTI, R.J. SCHOELKOPF, M.H. DEVORET ET D. VION, D. ESTEVE, *Phys Rev Lett*, **94**, 027005 (2005).
- [12] I. SIDDIQI, R. VIJAY, F. PIERRE, C.M. WILSON, M. METCALFE, C. RIGETTI, L. FRUNZIO ET M.H. DEVORET, *Phys Rev Lett*, **93**, 207002 (2004).

Chapitre 4

Amplificateur digital double couche à effet hall quantique

1 Introduction

Un autre domaine où s'applique le modèle de sine-Gordon est le système de double couche à effet Hall quantique [1], avec un taux de remplissage du niveau de Landau $\nu = 1$, et possédant des propriétés similaires aux jonctions supra-conductrices de Josephson. Les propriétés d'effet tunnel et les anomalies de transport dans ces systèmes ont suscité un grand intérêt durant ces dernières années [2]-[12].

Une double couche à effet Hall quantique consiste en deux gaz d'électrons, chacun confinés dans une couche de semi-conducteur et soumis à un intense champ magnétique orthogonal aux surfaces (direction z). En l'absence de courant entre les couches, chaque couche a un niveau de Landau $\nu = 1/2$. Si les couches sont identiques, le système peut être décrit à l'aide du formalisme des pseudo-spins [3]. Ainsi, un électron, dans une couche possédant une orientation de pseudo-spin haut, aura, dans l'autre couche, un pseudo-spin bas. Un électron traversant, par effet tunnel, l'espace entre les deux couches, correspond donc à un retournement de spin pour celui-ci. La composante z de tous les vecteurs pseudo-spins, spécifie alors le déséquilibre entre les couches. Il est évident que le système est dans son état de plus basse énergie quand tous les pseudo-spins sont alignés dans le plan, ce qui implique que les électrons sont équitablement distribués entre les deux couches. On traitera notre système de double couche à effet Hall quantique, comme un simple plan ferromagnétique avec un axe dur d'anisotropie.

En conséquence, on considère les systèmes d'axes ferromagnétiques simples [13, 14]. L'énergie dynamique, d'une double couche à effet Hall soumis à une différence de potentiel V entre les couches, est décrite par SG amortie avec des conditions de forçage de bord et une extrémité libre [5].

2 Modèle

Il est possible d'établir de manière très rigoureuse le modèle de la double couche à effet Hall, à partir de l'équation du mouvement de Landau-Lifshitz pour les milieux pseudo-ferromagnétiques (conservation de la longueur de densité locale de spin). Cependant, on préférera suivre l'approche de [5, 15], en considérant l'équation de conservation de la charge suivante

$$e \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial J_s}{\partial x} = J_{tun}, \quad (4.1)$$

où e est la charge électrique. Le paramètre d'ordre m décrit le déséquilibre de charge locale entre les deux couches. C'est la somme de toutes les contributions des composantes en z de tous les vecteurs pseudo-spins. Le super courant

$$J_s = -4\pi e \rho \ell^2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad (4.2)$$

est le courant à l'intérieur de chaque couche. ℓ est la longueur magnétique et ρ représente la rigidité du spin à vouloir rester dans le plan, c'est-à-dire à ne pas s'orienter parallèlement au champ magnétique. Enfin $u(x, t)$ est la variable de phase du pseudo-spin dans le plan. Le courant tunnel

$$J_{tun} = -2e\Delta \sin u(x, t), \quad (4.3)$$

est le courant dû à l'effet tunnel entre les deux couches, et Δ est l'amplitude pénétrante par effet tunnel. La double couche étant soumise à une différence de potentiel

$$V(x, t) = \frac{\hbar}{e} \dot{u}(x, t), \quad (4.4)$$

elle présente une capacité donnant lieu à un axe dur d'anisotropie β et donc

$$m = \frac{1}{4\beta} \dot{u}(x, t). \quad (4.5)$$

L'ensemble des équations (4.1-4.5) donne l'évolution du champ $u(x, t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\beta\rho(2\pi\ell^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\beta\Delta \sin u + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (4.6)$$

où γ est un paramètre d'amortissement.

La différence de potentiel appliqué à travers la jonction, constitue les conditions de forçage du système. L'équation (4.4) donne d'ailleurs la différence de potentiel à travers la barrière à la distance x en fonction du temps. Le système est donc soumis aux conditions de forçage en $x = 0$ avec une extrémité libre en $x = d$, soit

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=0} = \frac{e}{\hbar} V_{in}(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=d} = 0, \quad (4.7)$$

où V_{in} est la différence de potentiel inter-couches. On pose $\omega_0^2 = 8\beta\Delta$ et on liste, pour une utilisation future, les valeurs des paramètres donnés dans [2, 6] dans les unités $\hbar = e = k_B = 1$ (où $1K = 1.31 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ et $1J = 1.5 \times 10^{15} \text{ A}$) :

$$\ell = 40 \text{ nm}, \beta = 7 K, \Delta = 1.7 \cdot 10^{-5} K, \rho = 0.1 K, \omega_0^2 \sim 0.13 \text{ GHz}. \quad (4.8)$$

3 Détection de faibles signaux

La relation de dispersion linéaire du modèle (4.6) montre l'existence d'une bande interdite. Par conséquent, une double couche dont les électrons sont initialement équitablement distribués, ne répondra pas, en régime linéaire, à une différence de potentiel inter-couches $V_{in}(t)$, avec une fréquence prise dans la bande interdite

$$V_{in}(t) = V_0 \sin(\omega t), \quad \omega^2 < \omega_0^2. \quad (4.9)$$

En régime nonlinéaire, le système se bloquera sur une des solutions analytiques stationnaires données en annexe (p.55), et pour lesquelles une même amplitude et fréquence de forçage, peut avoir deux (ou plus) expressions différentes.

On prédit donc l'existence d'un comportement de bistabilité lorsque le système est soumis à une excitation à ses bornes, qui permettrait notamment la détection d'un très faible signal. Ce signal aurait pour conséquence de faire bifurquer le système, d'un état de faible différence de potentiel, vers un état d'intense différence de potentiel à travers les couches.

On définit, d'après (1.34), l'amplitude de supratransmission

$$V_s \sim 4 \frac{\hbar\omega}{e} \arctan \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1}, \quad (4.10)$$

valable pour des longueurs suffisamment grandes. On obtient $V_s \approx 13 \mu V$ avec les paramètres (4.8) .

Les doubles couches ont la possibilité de fonctionner en détecteur, selon le même principe que les réseaux de jonctions Josephson parallèles. Pour cela, il suffit de forcer le système en-dessous du seuil de supratransmission V_s , avec une excitation permanente périodique. Le moindre signal, surimposé à l'amplitude source V_{in} , fera alors bifurquer le système vers un état excité. On peut choisir le signal aussi faible que l'on souhaite, à condition de travailler de plus en plus près du seuil de supratransmission. D'autre part, on peut aussi choisir un seuil V_s relativement faible, en choisissant une fréquence ω près de la bande passante, là où l'expression de V_s tend vers zéro.

4 Amplificateur digital

A l'aide de simulations numériques, on démontre qu'une double couche à effet Hall quantique peut fonctionner comme un amplificateur digital. Le modèle étant celui de SG amortie, on sait que l'amortissement génère l'existence d'un seuil d'extinction V_e . En modulant le signal source entre le seuil de supratransmission V_s et le seuil d'extinction V_e , un signal surimposé peut donc faire bifurquer le système, d'un état de faible amplitude vers un état intense de sortie.

On module donc convenablement l'amplitude source, afin de concevoir un amplificateur qui réagit à un signal de faible amplitude et de minimum de durée. Soit

$$V_{in}(t) = [V_0(t) + S(t)] \sin(\omega t), \quad (4.11)$$

$$V_0(t) = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) \cos(\lambda t) + \frac{1}{2}(A_1 - A_2), \quad (4.12)$$

$$A_1 < V_s, \quad A_2 < V_e, \quad A_1 - A_2 \sim V_s - V_e, \quad (4.13)$$

où $V_0(t)$ est la différence de potentiel source et $S(t)$ est le signal qui doit être détecté, à la condition qu'il dure plus d'une période ($2\pi/\lambda$) de la modulation source. On utilisera

$$S(t) = \alpha [\theta(t - t_1) - \theta(t - t_2)], \quad (4.14)$$

comme représentation d'un signal d'amplitude α et de durée $t_2 - t_1$. θ est la fonction d'Heaviside.

On représente, en figure (4.1), la différence de potentiel V_{in} appliquée, et en figure (4.2), la différence de potentiel de sortie V_{out} , obtenue par intégration de (4.6) avec les conditions de bords (4.11).

Les simulations numériques montrent une amplification du signal de l'ordre de 200. Les doubles couches à effet Hall sont alors de bons candidats pour la détection de très faibles signaux et en tant qu'amplificateur digital. On a introduit, lors des simulations numériques, une perturbation d'une durée inférieure à la période de modulation, comme indiqué sur la figure (4.1), afin de vérifier la stabilité du système face à d'éventuels artefacts.

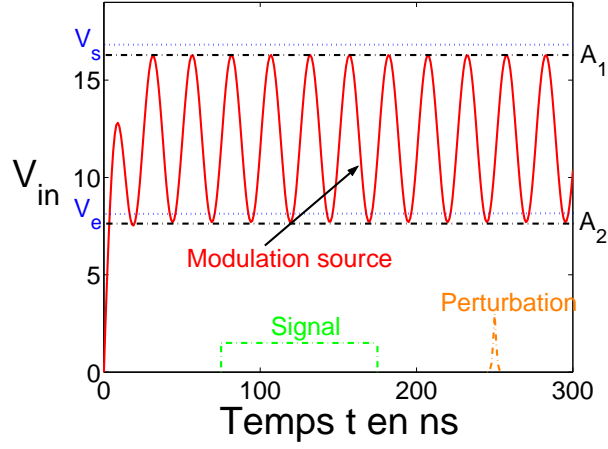


FIG. 4.1 – Tracé en rouge de la modulation d'amplitude V_0 source en fonction du temps et du signal $S(t)$. Les valeurs des amplitudes en traits et points sont $A_1 = 16.3\mu V$, $A_2 = 7.7\mu V$ et $\alpha = 0.15\mu V$. La modulation de fréquence vaut $\lambda = 0.25\text{GHz}$ et la porteuse non représentée a une fréquence $\omega = \omega_0/2$. Les deux lignes pointillés montrent les valeurs des deux seuils V_s et V_e . L'amplitude du signal et de la perturbation est tracée avec un facteur 10 pour être visible sur la figure.

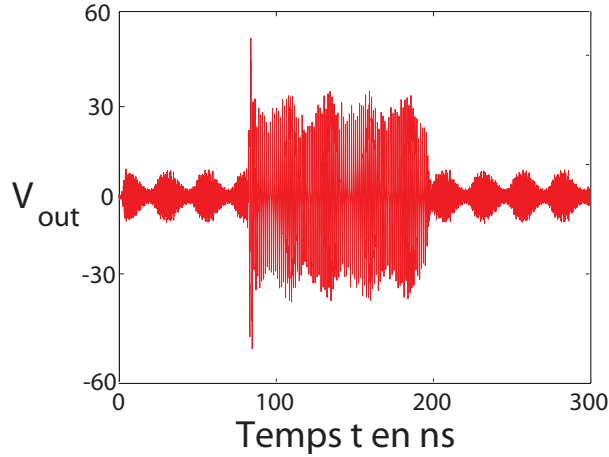


FIG. 4.2 – Tracé de l'amplitude de sortie de la différence de potentiel V_{out} , obtenue par intégration numérique de (4.6), avec les conditions de bords (4.11) illustrés dans la figure (4.1) avec une longueur $d = 30\mu m$ et un amortissement $\gamma = 0.1\omega_0$.

Bibliographie

- [1] Chapitres V par S. M. GIRVIN ET A. H. MACDONALD et II par J.P. EISENSTEIN dans *Perspectives in Quantum Hall Effect* edited by S. Das Sarma et A. Pinczuk Wiley, New York (1997).
- [2] I.B. SPIELMAN, J.P. EISENSTEIN, L.N. PFEIFFER ET K.W. WEST, *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 5808 (2000).
- [3] K. MOON ET AL., *Phys. Rev. B*, **51**, 5138 (1995); K. YANG ET AL., *Phys. Rev. B*, **54**, 11644 (1996).
- [4] Y.N. JOGLEKAR ET A.H. MACDONALD, *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 196802 (2001).
- [5] M.M. FOGLER ET F. WILCZEK, *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 1833 (2001).
- [6] C.B. HANNA, A.H. MACDONALD ET S.M. GIRVIN, *Phys. Rev. B*, **63**, 125305 (2001).
- [7] M. ABOLFATH, R. KHOMERIKI ET K. MULLEN, *Phys. Rev. B*, **69**, 165321 (2004).
- [8] R.L. JACK, D.K.K. LEE ET N.R. COOPER, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 126803 (2004).
- [9] Z. WANG, *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 176804 (2005).
- [10] R.L. JACK, D.K.K. LEE ET N.R. COOPER, *Phys. Rev. B*, **71**, 085310 (2005).
- [11] H.A. FERTIG ET G. MURTHY, *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 156802 (2005).
- [12] E. ROSSI, A.S. NUNEZ ET A.H. MACDONALD, *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 266804 (2005).
- [13] H. J. MIKESKA, *J.Phys. C : Solid State Phys.*, **11**, L29 (1978).
- [14] G. WYSIN, A. R. BISHOP ET P. KUMAR, *J. Phys. C : Solid State Phys.*, **17**, 5975 (1984).
- [15] G. R. KHOMERIKI, L. TKESHELASSHVILI, T. BUIHVIL, T. BUIHVILI ET SH. REVISHVILI, *J. Phys. C : Solid State Phys.*, **17**, 5975 (1984).

Deuxième partie

Le modèle Schrödinger
nonlinéaire

Chapitre 1

Supratransmission dans les milieux à nonlinéarité Kerr

L'effet Kerr optique résulte de la dépendance de l'indice de réfraction à l'intensité du champ électrique. Une des conséquences est la possibilité de former des solitons spatiaux dans des milieux diffractifs, la nonlinéarité compensant les effets dissipatifs. Cet effet d'auto-focalisation de la lumière fut proposé en 1964 [1] et mis en évidence dans l'équation de Schrödinger nonlinéaire (NLS) en 1965 [2], dont l'intégrabilité fut démontrée en 1972 [3]. Cet effet d'auto-focalisation fut tout d'abord réalisé expérimentalement dans des vapeurs de sodium en 1974 [4], puis dans un milieu diélectrique de guide d'ondes optique plan (liquide CS₂) en 1985 [5] et dans un guide d'ondes en verre en 1990 [6]. Pour plus de détails sur les solitons spatiaux, on donne en exemple le livre [7] et la revue [8].

1 Milieu Kerr

La première théorie sur la propagation de la lumière, unifiant champs électrique et magnétique, a été développée par Maxwell dans les années 1860. Ces équations, pour l'intensité des champs \vec{E} et \vec{H} , et les inductions \vec{D} et \vec{B} , sont pour un milieu diélectrique (en l'absence de charges libres et de courant)

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.2)$$

où on a, pour un milieu non magnétique

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu \vec{H}(\vec{r}, t), \quad (1.3)$$

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t). \quad (1.4)$$

Afin d'établir une équation pour le champ électrique, on prend le rotationnel de (1.2) et on obtient

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) - \epsilon_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (1.5)$$

En général, la polarisation est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}(t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t - \tau) \vec{E}(r, \tau) d\tau \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(2)}(t - \tau_1, t - \tau_2) \vec{E}(r, \tau_1) \vec{E}(r, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(3)}(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \vec{E}(r, \tau_1) \vec{E}(r, \tau_2) \vec{E}(r, \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Pour un milieu Kerr, la contribution de la seconde harmonique est négligeable devant l'effet de $\chi^{(3)}$, pour des raisons de symétrie. On remplace (1.6) dans (1.4), et (1.5) devient

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t - \tau) \vec{E}(r, \tau) d\tau = \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(3)}(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \vec{E}(r, \tau_1) \vec{E}(r, \tau_2) \vec{E}(r, \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \right], \end{aligned} \quad (1.7)$$

ce qui constitue la définition d'un milieu Kerr.

On suppose maintenant que la réponse de la polarisation \vec{P} au champ \vec{E} est quasi-instantanée

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[(1 + \chi^{(1)}) \vec{E}(\vec{r}, t) + \chi^{(3)} \vec{E}(\vec{r}, t)^2 \vec{E}(\vec{r}, t) \right]. \quad (1.8)$$

La limite dite SVEA d'enveloppe lentement variable (slowly varying envelope approximation) consiste à moyenner, pour une onde monochromatique de fréquence angulaire ω , sur les oscillations rapides. Par conséquent, les harmoniques supérieures, dans le terme nonlinéaire \vec{E}^2 , disparaissent et on peut remplacer

$$\chi^{(1)} \vec{E}_\omega + \chi^{(3)} \vec{E}_\omega^2 \vec{E} \longrightarrow \chi^{(1)} \vec{E}_\omega + \chi^{(3)} |\vec{E}_\omega|^2 \vec{E}_\omega. \quad (1.9)$$

En résumé, tout revient à remplacer l'indice $n = \sqrt{1 + \chi^{(1)}}$ par *l'indice non-linéaire*

$$n^2 \longrightarrow n^2 + \chi^{(3)} |\vec{E}_\omega|^2, \quad (1.10)$$

et l'équation de propagation nonlinéaire s'écrit finalement

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_\omega - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}_\omega = \frac{\chi^{(3)}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (|\vec{E}_\omega|^2 \vec{E}_\omega). \quad (1.11)$$

La nonlinéarité provient donc de matériaux dont l'indice dépend de l'intensité lumineuse (AlGaAs, CdS...). La valeur de $\chi^{(3)}$ est en général très faible et, l'ajout d'impuretés lors de la réalisation de fibres optiques, permet de leur conférer des propriétés nonlinéaires à flux d'énergie raisonnable.

On considère un champ électrique monochromatique de fréquence ω polarisé dans la direction x , c'est-à-dire orthogonalement aux directions de propagation y et z . On observe les phénomènes stationnaires, et pour cela, on pose que l'onde électrique est stationnaire en temps, c'est-à-dire $E(r, t) = E(r) \cos(\omega t)$. On choisit donc une solution complexe transverse électrique (TE) de la forme

$$\vec{E}_\omega(r, t) = E_x(y, z)e^{-i\omega t}\vec{e}_x, \quad (1.12)$$

où e_x est le vecteur unitaire de coordonnée x . Le mode TE impose $(\vec{\nabla}n) \cdot \vec{E} = 0$, c'est-à-dire que pour une polarisation suivant x , la variation de n ne peut se faire que suivant y ou z . Si le matériau est suffisamment grand dans la direction de polarisation x , il n'y a pas de dépendance du champ en x , à savoir $\frac{\partial}{\partial x} = 0$. L'équation de Maxwell devient alors l'équation nonlinéaire d'Helmoltz

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 + 3\chi^{(3)}|E_x|^2) E_x = 0. \quad (1.13)$$

2 Seuil de supratransmission dans l'équation de Schrödinger nonlinéaire

2.1 Introduction

L'équation de Schrödinger normalisée suivante

$$i\frac{\partial^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = V\psi, \quad (1.14)$$

où V est une constante (potentiel), possède des solutions ψ_1 du type ondes planes

$$\psi_1 = Ae^{i(kx - \omega t)} + c.c. \quad (1.15)$$

La relation de dispersion

$$\omega = k^2 + V, \quad (1.16)$$

garantit que (1.15) est solution de (1.14). On voit qu'il existe une bande interdite naturelle, pour toutes fréquences $\omega < V$. Ainsi, toutes les ondes de fréquence inférieure au potentiel V , arrivant sur le milieu, sont reflétées et génèrent une onde évanescence dans le milieu. Ainsi, en posant $k = i\kappa$, la relation de dispersion (1.16) devient alors

$$\omega = V - \kappa^2, \quad (1.17)$$

où κ est le "vecteur d'ondes évanescent".

On souhaite avoir une expression analytique du seuil A_s . De même que pour SG, on va tout d'abord effectuer un calcul direct du seuil en injectant une solution en onde plane de la forme $Ae^{i(\kappa x - \Omega t)}$ dans NLS. On obtient alors la relation de dispersion $A^2 = V - \Omega + \kappa^2$. La première onde se propage pour $\kappa = 0$, et on a donc

$$A_s = \sqrt{V - \Omega}. \quad (1.18)$$

Comme dans le modèle sine-Gordon, l'énergie nécessaire à la génération de soliton est plus importante et est confirmée par des simulations numériques (cf figure 1.1).

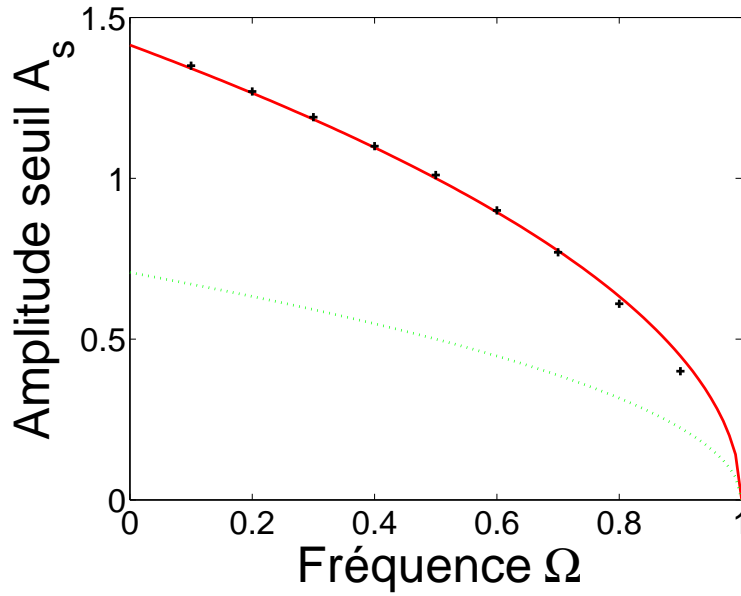


FIG. 1.1 – Les croix noires représentent le résultat de simulations numériques de l'équation (1.14) avec les conditions (1.20,1.21) et le potentiel $V = 1$. La courbe verte pointillée représente le seuil obtenu en (1.19). La courbe en rouge représente le véritable seuil donné en (1.26).

2.2 Instabilité du profil d'onde nonlinéaire

On souhaite désormais, comme on l'a fait auparavant pour SG, appliquer la supratransmission nonlinéaire à NLS

$$i\frac{\partial^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + |\psi|^2 \psi = V\psi, \quad (1.19)$$

où l'on a la relation de dispersion linéaire (1.17). On soumet NLS aux conditions de bords de Dirichlet suivantes

$$\psi(0, t) = A \sin(\Omega t), \quad \psi(\infty, t) = 0, \quad (1.20)$$

associée aux conditions initiales de Cauchy

$$\psi(x, 0) = A \sin(\Omega t), \quad \psi_t(x, 0) = 0. \quad (1.21)$$

Soit

$$\psi_s(x, t) = \frac{\sqrt{2}\kappa e^{-i\Omega t}}{\cosh[\kappa(x - x_0)]}, \quad (1.22)$$

une solution particulière soliton de l'équation de NLS où x_0 est le centre du soliton. La solution (1.22) donne la relation de dispersion (1.17) pour $w = \Omega$ et garantit que ψ_s est solution de NLS. On choisit de forcer le système avec une fréquence prise dans le gap ($0 < \Omega < V$). Dans ces conditions, le système adopte une solution type soliton ψ_s . La figure (1.2) montre, pour différentes valeurs du temps, la naissance d'un soliton pour une fréquence prise dans la bande interdite et une amplitude suffisante A_s . On peut noter la déformation de l'onde

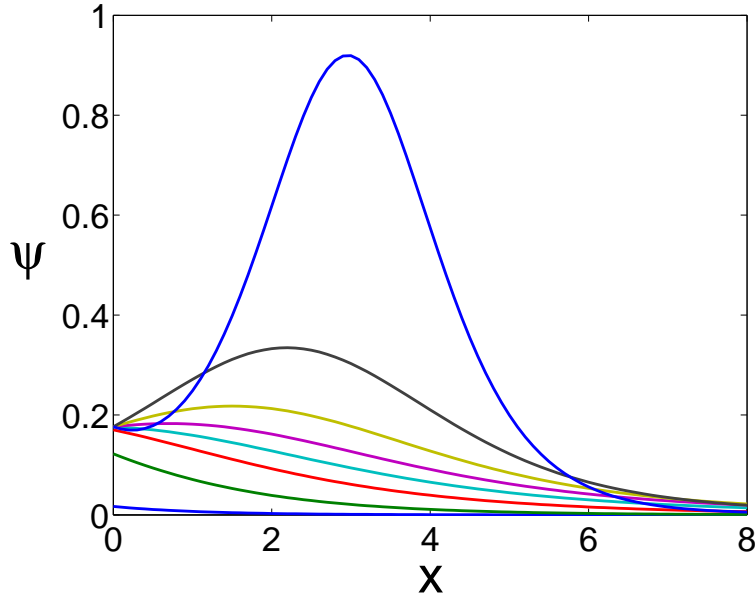


FIG. 1.2 – Tracé de ψ pour différents temps obtenu par simulations numériques de (1.20) avec $L = 50$ et $\Omega = 0.5$.

évanescence dans le milieu, au fur et à mesure que l'amplitude de forçage grandit, jusqu'à l'émission d'un soliton.

On étudie donc maintenant l'instabilité de l'onde évanescence nonlinéaire dans NLS avec un forçage périodique des conditions de bords

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + |\psi|^2\psi = V\psi, \quad \psi(0, t) = A \cos(\Omega t). \quad (1.23)$$

Afin d'observer les effets dus au forçage, on regarde la perturbation $\eta(x, t)$ de la solution $\psi_s = \psi_1 e^{-i\Omega t}$, soit

$$\psi(x, t) = [\psi_1(x, t) + \epsilon\eta(x, t)] e^{-i\Omega t}, \quad \epsilon \ll 1. \quad (1.24)$$

On substitue (1.24) dans (1.23), il vient à l'ordre ϵ

$$i\eta_t + \eta_{xx} + \eta(\Omega - V) + (2\eta + \bar{\eta})U(x, t) = 0, \quad (1.25)$$

où $\bar{\eta}$ est le complexe conjugué de η et $U(x, t) = \psi_1^2$ représente le potentiel.

Le maximum de la solution $|\psi_s|$ donne le seuil de supratransmission et est obtenu pour $\cosh[\kappa(x - x_0)] = 1$, soit $A_s = \sqrt{2}\kappa$. En utilisant la relation de dispersion linéaire, il vient

$$A_s = \sqrt{2(V - \Omega)}. \quad (1.26)$$

On doit maintenant montrer que l'existence du seuil A_s est bien le résultat d'une instabilité du profil d'ondes évanescent, pour une amplitude de forçage A_s . Pour cela, on suppose que le profil d'ondes évanescent nonlinéaire ψ_e , généré dans le milieu, a la forme

$$\psi_e(x, t) = \frac{Ae^{-i\Omega t}}{\cosh[\kappa(x - x_0)]}, \quad (1.27)$$

A étant l'amplitude permettant de rattacher le profil évanescent aux conditions de forçage en $x = 0$. On suppose que le potentiel $U(x)$ est obtenu à partir du profil évanescent en considérant son extremum sur une période

$$U(x) = \max_t[\psi_e(x, t)] = \frac{A^2}{\cosh^2[\kappa x]}, \quad (1.28)$$

avec $x_0 = 0$.

On effectue maintenant des simulations numériques de (1.25) avec le potentiel (1.28). On donne, comme condition initiale, une petite perturbation de ψ_1 , c'est-à-dire $\eta(x, 0) = 0.01$ avec les conditions de bords $\eta(0, t) = \eta(L, t) = 0.01$ et $\eta_t(x, 0) = 0$. On augmente ensuite, progressivement, l'amplitude B . La figure (1.3) montre le résultat de ces simulations numériques, où l'on a tracé en fonction de la fréquence de forçage Ω , les valeurs de A pour lesquelles η démarre sa croissance exponentielle.

Tant que l'amplitude est inférieure au seuil, on observe de petites oscillations de η autour de sa valeur initiale. Par contre, lorsque l'on se rapproche du seuil, on observe des oscillations qui grandissent exponentiellement.

Les simulations sont en grand accord avec les prédictions. On a donc une description du phénomène de supratransmission nonlinéaire dans NLS. Elle résulte donc de l'instabilité du profil d'ondes évanescent, pour un milieu nonlinéaire forcé aux bords par des conditions périodiques et une fréquence dans le gap.

On a par ailleurs, dans le cas NLS, une expression analytique du seuil d'amplitude qui génère une supratransmission nonlinéaire, à savoir

$$A_s = \sqrt{2(V - \Omega)}. \quad (1.29)$$

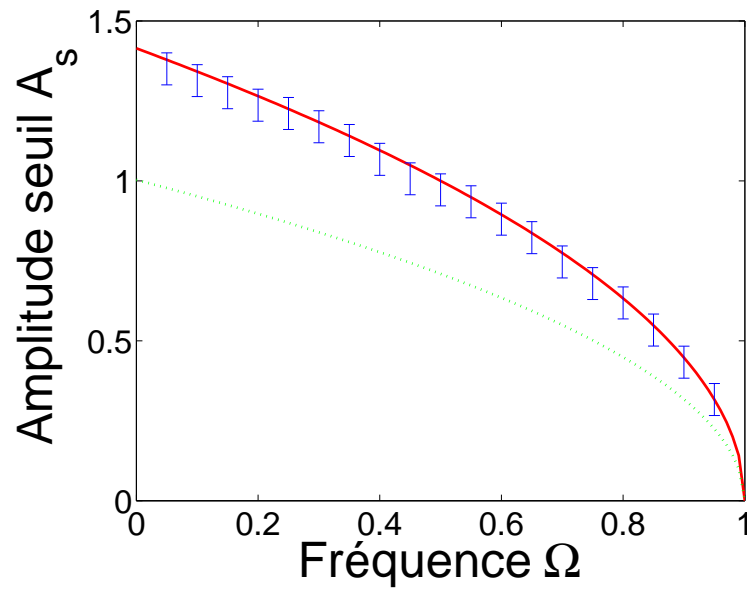


FIG. 1.3 – Les barres d’erreur en bleu donnent le critère d’instabilité A , obtenu par simulations numériques de (1.25) avec le potentiel (1.33). Il est difficile de juger à partir de quand, précisément, η croît exponentiellement, on a donc une erreur sur A d’environ 0.05. La courbe rouge est la prédiction faite en (1.26). La courbe verte en pointillés est le seuil calculé en (1.18). Les paramètres utilisés sont $L = 10$ et $V = 1$.

Bibliographie

- [1] R.Y. CHIAO, E. GARMIRE ET C.H. TOWNES, *Phys Rev Lett*, **13**, 479 (1964).
- [2] P.L. KELLEY, *Phys Rev Lett*, **15**, 1005 (1965).
- [3] V.E. ZAKHAROV ET A.B. SHABAT, *Sov Phys JETP*, **34**, 62 (1972).
- [4] J.E. BJORKHOM ET A. ASHKIN, *Phys Rev Lett*, **32**, 129 (1974).
- [5] A. BARTHELEMY, S. MANEUF ET C. FROEHLI, *Opt Comm*, **55**, 201 (1985).
- [6] J.S. AITCHISON, A.M. WEINER, Y. SILBERBERG, M.K. OLOVER, J.L. JACKEL, D.E. LEAIRD, E.M. VOGEL ET P.W.E. SMITH, *Opt Lett*, **471**, 15 (1990).
- [7] Y.S. KIVSHAR ET G.P. AGRAWALL, *Optical Solitons : From Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press, San Diego, CA (2003)
- [8] C. ETRICH, F. LEDERER, B.A. MALOMED, T. PESCHEL ET U. PESCHEL, *Prog Optics*, **41**, 483 (2000)

Chapitre 2

La bistabilité dans les réseaux de guides d'ondes nonlinéaires

1 Introduction

Les recherches expérimentales sur l'autofocalisation dans les milieux diélectriques périodiques ont eu, depuis quelques années, un regain d'intérêt [1, 2], et ont permis de concevoir des dispositifs possédant de riches propriétés optiques. La périodicité provient de la variation de l'indice optique et on peut "observer" ces milieux périodiques de deux manières différentes.

Tout d'abord, on peut faire propager le champ dans le sens de variation de l'indice (expériences dans les milieux de Bragg), où l'on peut observer des solitons de gap qui ont suscité de nombreuses études depuis leur prédiction en 1979 [3], leur expression analytique en 1989 [4, 5], et leur découverte expérimentale en 1992 [6].

On peut aussi faire propager le champ dans la direction transverse de variation de l'indice. Le milieu périodique devient alors un coupleur directionnel, et de nouveaux résultats intéressants ont été obtenus. En particulier, on peut citer les guides d'ondes optiques diélectriques adjacents (figure 2.1), qui se couplent par échange de puissance entre modes guidés [7], et qui, déjà dans un contexte linéaire, révèlent des anomalies stupéfiantes de diffraction et de réfraction [8].

Dans un contexte nonlinéaire, les réseaux de guides d'ondes couplés deviennent des générateurs de solitons [7], mis en évidence dans de nombreuses situations physiques intéressantes [9]-[15].

On s'intéresse ici à la propagation de la lumière dans la direction transverse de variation de l'indice, à l'intérieur des réseaux de guides d'ondes optiques. Lorsque le réseau fonctionne en coupleur directionnel et en régime nonlinéaire Kerr, le modèle est le système discret NLS, comme on le montre plus bas. Le couplage entre guides d'ondes adjacents joue ici le rôle de diffraction et il a été démontré récemment que des solitons de gap peuvent être générés dans de tels

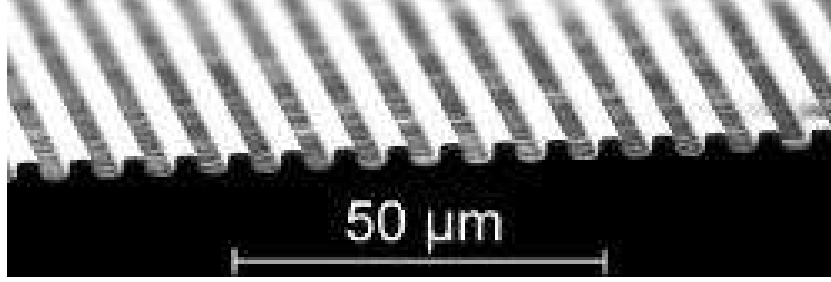


FIG. 2.1 – Réseau de guides d’ondes linéaires à base de polymères d’après [8]

réseaux, grâce au forçage des conditions de bords [16]. Le principe est l’utilisation d’un guide d’ondes maître d’indice n_0 , nourri par un mode guidé et couplé à un réseau d’indice $n_1 < n_0$ par échange de puissance entre modes guidés. La théorie de la supratransmission nonlinéaire [17] montre que, si l’on atteint l’intensité de bifurcation dans le guide d’ondes maître, des solitons sont émis dans le réseau par *siphonnage* de l’énergie contenue dans les guides d’ondes maîtres.

Dans ce chapitre, on se propose de regarder la bistabilité induite par la non-linéarité dans les réseaux de guides d’ondes. Pour cela, on considère le cas de réseaux relativement courts suivant la direction transverse, couplés à deux guides d’ondes maîtres latéraux, comme on peut le voir sur la figure (2.2). Les guides d’ondes maîtres servent à conduire l’injection de lumière et à forcer le réseau de guides d’ondes dans la bande interdite. En effet, le réseau doit posséder un indice inférieur aux guides d’ondes maîtres, ceci afin qu’en régime linéaire les modes guidés dans les guides d’ondes maîtres ne puissent se propager dans le réseau, à cause de la différence d’indice (marche de potentiel). Cependant, en régime nonlinéaire, les modes guidés des guides d’ondes maîtres vont pouvoir, pour une intensité suffisante (supratransmission), se propager dans le réseau et ce, dans la bande interdite. L’injection de lumière dans les guides d’ondes maîtres sera donc la clé du comportement bistable du réseau. En effet, pour une amplitude proche du seuil de supratransmission, le rayonnement passera des guides d’ondes maîtres au réseau, donnant lieu à une concentration d’énergie lumineuse dans le réseau, et à une forte intensité lumineuse en sortie du réseau. Au contraire, une amplitude en-dessous du seuil de supratransmission, donnera lieu à une intensité quasi-inexistante dans le réseau, c’est-à-dire, un comportement évanescent.

On montre, dans la suite, que ce système peut se comporter comme *un réseau de guides d’ondes nonlinéaires bistable, détecteur de lumière* [18].

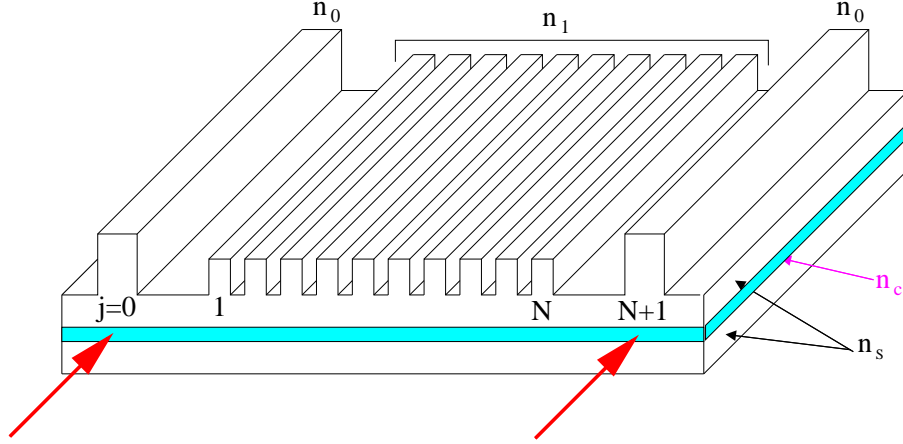


FIG. 2.2 – Réseau de N guides d'ondes nonlinéaires d'indices n_1 , couplées à deux guides d'ondes maîtres d'indices $n_0 > n_1$. Les flèches rouge représentent l'injection de radiation.

2 Réseau de guides d'ondes

2.1 Généralités

Les réseaux de guides d'ondes optiques couplés sont en général constitués en AlGaAs et composés de trois couches : le substrat d'indice n_s , le cœur d'indice $n_c > n_s$ et la surface de même indice n_s que le substrat. La dimension d'un réseau est de quelques millimètres de long (direction z), et large d'une centaine de micromètres (direction transverse y). L'espacement et la largeur des guides d'ondes, ainsi que l'épaisseur des couches, sont de quelques micromètres. La surface est gravée, de sorte que l'on obtienne une structure périodique. La lumière est injectée dans la couche de cœur, où elle est confinée selon le principe de réflexion totale interne, puisque son indice est supérieur à celui des deux autres couches. Cependant, la diffusion dans la direction transverse y est possible, à moins d'être compensée par la nonlinéarité. Par effet tunnel, le rayonnement pénètre la couche de surface et se retrouve ainsi distribué dans les guides d'ondes.

2.2 Modèle

La propagation dans la direction z d'un mode guidé ψ_m , polarisé suivant x à l'intérieur d'un guide d'ondes, est décrite par l'équation de Maxwell pour un milieu linéaire, homogène, isotrope et non magnétique,

$$\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2 n_m^2}{c^2} - \beta^2 \right) \psi_m = 0. \quad (2.1)$$

Le vecteur d'ondes β est un mode particulier du guide d'ondes d'indice n_m . Si la largeur du champ optique est suffisamment petite face à la distance séparant deux

guide d'ondes voisins, le champ de chaque guide d'ondes se propage dans chacun d'eux sans ressentir l'existence de l'autre. Dans ce cas, ces champs suivent leur évolution, indépendamment, suivant (2.1). Dans le cas où les deux guides d'ondes sont suffisamment proches, il y a recouvrement du champ électrique des deux guides d'ondes voisins, et le champ n'est plus constant dans la direction z . Ainsi, si l'intensité du signal incident est suffisamment forte pour modifier l'indice de réfraction (milieu Kerr), l'évolution totale du champ E sera donnée par l'équation d'Helmoltz nonlinéaire (1.13). On se place dans le cas où le recouvrement entre deux champs adjacents est faible. On suppose alors que la variation de puissance est faible, et l'on peut introduire une faible variation suivant z , grâce à une méthode multi-échelle. En suivant la méthode [19], on pose comme solution approchée de (1.13),

$$E = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E_m(\nu z) \psi_m(y) e^{-i\beta z}, \quad (2.2)$$

où $\psi_m(y)$ est un mode guidé, $E(\nu z)$ est son amplitude suivant z , et ν est un petit paramètre déterminé plus tard. On introduit (2.2) dans (1.13),

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[-2i\nu\beta\psi_m \frac{\partial E_m}{\partial z} + \nu^2\psi_m \frac{\partial^2 E_m}{\partial Z^2} + \left(\frac{\partial \psi_m^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \psi_m - \beta^2 \psi_m \right) E_m \right. \\ \left. + \frac{3\omega^2 \chi^{(3)}}{c^2} \sum_{m', m''} E_m E_{m'} E_{m''}^* \psi_m \psi_{m'} \psi_{m''}^* \right] e^{-i\beta z} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

En considérant (2.1), on multiplie (2.3) par $\psi_n^* e^{i\beta z}$, puis on intègre suivant y , il vient

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\left(-2i\nu\beta\psi_m \frac{\partial E_m}{\partial Z} + \nu^2\psi_m \frac{\partial^2 E_m}{\partial Z^2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dy \psi_m \psi_n^* \right. \\ \left. + \frac{\omega^2}{c^2} E_m \int_{-\infty}^{+\infty} dy \Delta n_m^2 \psi_m \psi_n^* \right. \\ \left. + \frac{3\omega^2 \chi^{(3)}}{c^2} \sum_{m', m''} E_m E_{m'} E_{m''}^* \int_{-\infty}^{+\infty} dy \psi_n^* \psi_m \psi_{m'} \psi_{m''}^* \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

où $\Delta n_m^2 = n^2 - n_m^2$ mesure la différence entre le profil d'indice total (n) et l'indice n_m de chaque fibre m .

On suppose, comme approximation des intégrales de recouvrement,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \psi_m \psi_{m+j}^* = a_j \nu^j, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dy \Delta n_m^2 |\psi_m|^2 = C_m \nu, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dy \Delta n_m^2 \psi_m^* \psi_{m\pm 1} = Q_{(m, m\pm 1)} \nu. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Si on se limite à l'interaction entre plus proches voisins, et que la contribution non linéaire n'intervient que pour $m = n = m' = m''$, on pose

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy |\psi_n|^4 = g_{nl}, \quad 3\chi^{(3)} = \nu, \quad (2.6)$$

et (2.4) devient pour l'ordre ν ,

$$-2i\beta a_1 \frac{\partial E_n}{\partial z} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(C_n E_n + Q_{(n,n+1)} E_{n+1} + Q_{(n,n-1)} E_{n-1} + \frac{\omega^2}{c^2} g_{nl} |E_n|^2 E_n \right) = 0. \quad (2.7)$$

Avec $z = \frac{-2a_1 c^2 \beta Z}{\omega^2}$ et $E_n = \frac{\phi_n}{\sqrt{g_{nl}}}$, on obtient l'équation,

$$i \frac{\partial \phi_n}{\partial Z} + C_n \phi_n + Q_{(n,n+1)} \phi_{n+1} + Q_{(n,n-1)} \phi_{n-1} + |\phi_n|^2 \phi_n = 0, \quad (2.8)$$

décrivant la propagation d'une onde lumineuse dans la direction transverse de variation de l'indice, dans un réseau de guides d'ondes couplés avec leurs plus proches voisins.

3 Dispositif

3.1 Introduction

On applique maintenant le modèle à notre dispositif (figure 2.2). Il est constitué d'un réseau de N guides d'ondes possédant des propriétés nonlinéaires, et de deux guides d'ondes maîtres linéaires en $n = 0$ et $n = N + 1$. L'injection de lumière se fait dans les guides d'ondes maîtres, où elle est linéairement piégée, du fait de la différence d'indice. Un mode guidé ne peut se propager à l'intérieur d'une fibre que si la quantité

$$\frac{\omega^2}{c^2} n_m^2 - \beta^2 \quad (2.9)$$

de l'équation (2.1) est positive. Dans le cas contraire, on a une onde évanescence. Ces conditions, appliquées à notre dispositif, entraînent, pour des guides d'ondes maîtres d'indice n_0 et des guides d'ondes du réseau d'indice n_1 ,

$$\frac{\omega^2}{c^2} n_0^2 - \beta^2 > 0, \quad \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 - \beta^2 < 0. \quad (2.10)$$

3.2 Modèle

Notre dispositif est constitué de deux types de guides d'ondes. Tout d'abord, on a les guides d'ondes maîtres d'indice n_0 , qui donnent lieu au mode guidé ψ_0 , et ensuite, les guides d'ondes constituant le réseau, d'indice n_1 , qui donnent lieu

au mode guidé ψ_1 . Ceci, sous réserve que la propagation dans les guides d'ondes semblables s'effectue selon le même mode. Il y a donc deux types de constantes C_n

$$C_0 = \frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} dy (n^2(y) - n_0^2) |\psi_0|^2, \quad C_1 = \frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} dy (n^2(y) - n_1^2) |\psi_0|^2. \quad (2.11)$$

Les différentes grandeurs

$$Q_{(m,m\pm 1)} = \frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} dy [n^2(x) - n_m^2] \psi_m^* \psi_{m\pm 1}, \quad (2.12)$$

représentent le couplage entre les fibres m et les fibres $m \pm 1$. Le couplage entre les guides d'ondes est une notion essentielle du modèle. En effet, ce couplage entraîne une interaction entre les différents modes de chaque fibre (échange de puissance entre modes guidés) et confèrent au réseau des propriétés de bistabilité nonlinéaire. Sans le couplage, chaque champ à l'intérieur d'un guide d'ondes suit son évolution, indépendamment de ses voisins. En fait, pour supprimer ou augmenter le couplage, il suffit d'augmenter ou de diminuer l'espacement entre les guides d'ondes.

On représente schématiquement, sur la figure (2.3), l'amplitude des modes guidés de chaque fibre, avec le profil d'indices du réseau.

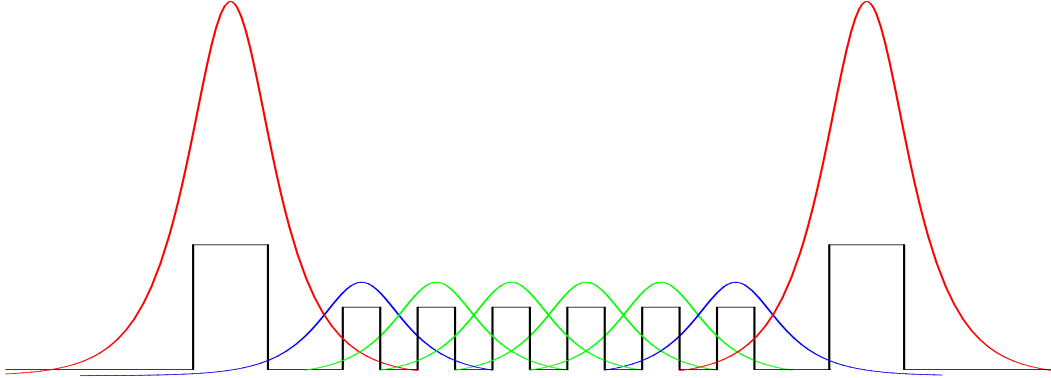


FIG. 2.3 – Schématisation de l'amplitude du champ de chaque fibre. L'injection de radiation se faisant dans les guides maîtres, l'amplitude des champs des guides maîtres (rouge) est bien plus grande que pour les guides du réseau (bleu et vert).

On trace aussi la représentation des différentes valeurs $Q_{(m,m\pm 1)}$ sur les figures (2.4), (2.5), (2.6) et (2.7). Chaque figure représente un coefficient particulier, accompagné du profil d'indices résultant $n^2(x) - n_m^2$ pour ce coefficient. Il faut bien comprendre, que le calcul de l'intégrale donnant les différentes valeurs de couplage, ne s'effectue qu'aux endroits, où l'amplitude des deux champs, ainsi que le profil d'indices résultant, sont différents de 0. On a tracé en violet sur les figures les intervalles x pour lesquels ces conditions sont réunies.

En fait, on s'aperçoit qu'il y a trois types différents de couplages :

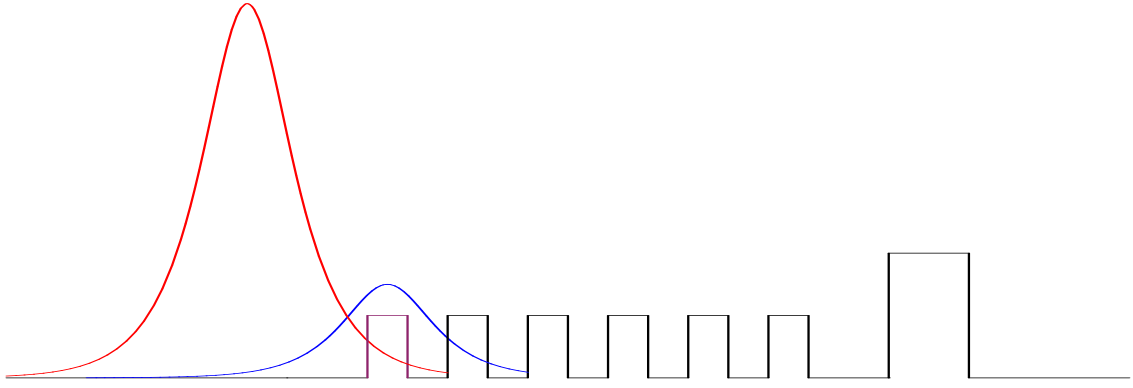


FIG. 2.4 – $\nu Q_{(0,1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy [n^2(x) - n_0^2] \psi_0^* \psi_1 \equiv Q_0$

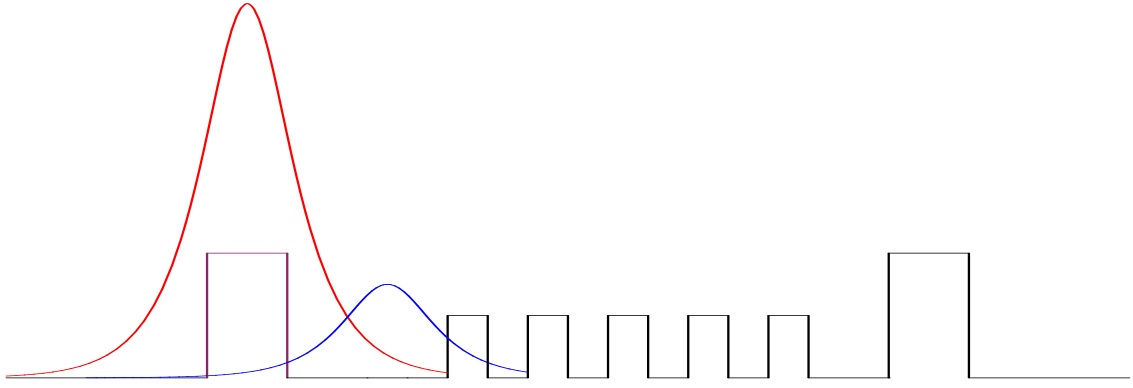


FIG. 2.5 – $\nu Q_{(1,0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy [n^2(x) - n_1^2] \psi_1^* \psi_0 \equiv Q_1$

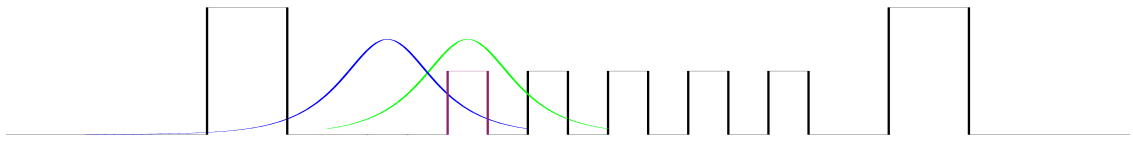


FIG. 2.6 – $\nu Q_{(1,2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy [n^2(x) - n_1^2] \psi_1^* \psi_2 \equiv Q_2$

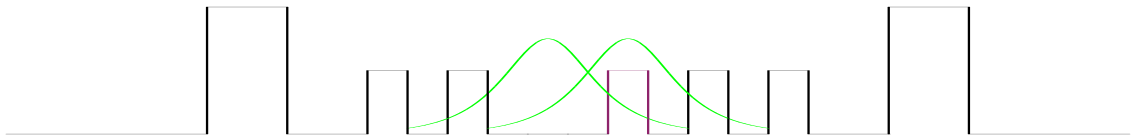


FIG. 2.7 – $\nu Q_{(3,4)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy [n^2(x) - n_3^2] \psi_3^* \psi_4 \equiv Q_2$

- Le couplage, entre les guides d'ondes maîtres et le réseau

$$Q_0 = Q_{(0,1)} = \frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} dy [n^2(x) - n_0^2] \psi_0^* \psi_1, \quad (2.13)$$

- Le couplage entre le réseau et les guides d'ondes maîtres

$$Q_1 = Q_{(1,0)} = \frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} dy [n^2(x) - n_1^2] \psi_1^* \psi_0, \quad (2.14)$$

- Et enfin, le couplage entre deux guides d'ondes appartenant au réseau

$$Q_2 = \begin{cases} Q_{(1,2)} = \frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} dy [n^2(x) - n_1^2] \psi_1^* \psi_2, \\ Q_{(j,j\pm 1)} = \frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} dy [n^2(x) - n_j^2] \psi_j^* \psi_{j\pm 1}, \quad j = 2, \dots, N-1, \\ Q_{(N,N-1)} = \frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} dy [n^2(x) - n_N^2] \psi_N^* \psi_{N-1}, \end{cases} \quad (2.15)$$

On admettra, cependant, que le couplage entre deux guides d'ondes du réseau, est égal au couplage, entre le réseau et les guides d'ondes maîtres, c'est-à-dire $Q_1 = Q_2$.

Le système d'équations modélisant notre dispositif est donc, d'après les considérations précédentes et (2.8)

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \phi_0}{\partial Z} + C_0 \phi_0 + Q_0 \phi_1 &= 0, \\ i \frac{\partial \phi_j}{\partial Z} + C_1 \phi_j + Q_1 (\phi_{j+1} + \phi_{j-1}) + |\phi_j|^2 \phi_j &= 0, \quad j = 1, \dots, N, \\ i \frac{\partial \phi_N}{\partial Z} + C_0 \phi_{N+1} + Q_0 \phi_N &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Si on effectue le déphasage $\phi_j = \Psi_j e^{iC_0 Z}$, et que l'on introduit de la dissipation, il vient, pour l'enveloppe du champ Ψ

$$\begin{aligned} i(\partial_Z + \gamma_0) \Psi_0 + Q_0 \Psi_1 &= 0, \\ i(\partial_Z + \gamma) \Psi_j + Q_1 (\Psi_{j+1} + \Psi_{j-1} - 2\Psi_j) + |\Psi_j|^2 \Psi_j &= V \Psi, \quad j = 1, \dots, N, \\ i(\partial_Z + \gamma) \Psi_{N+1} + Q_0 \Psi_N &= 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

où $V = C_0 - C_1 - 2Q_1$ est le potentiel. γ représente l'amortissement dans le réseau et γ_0 représente l'amortissement dans les guides d'ondes maîtres. Les deux constantes Q_0 et Q_1 représentent respectivement, le couplage entre un guide maître et son guide voisin appartenant au réseau, et le couplage entre deux guides d'ondes voisins du réseau.

3.3 Seuil de supratransmission

L'injection d'un flux d'énergie dans les guides d'ondes maîtres se traduit par la donnée des amplitudes d'entrée A pour les fonctions Ψ_0 et Ψ_{N+1} en $z = 0$, les guides d'ondes du réseau étant, quant à eux, initialement sans flux énergétique. On associe donc au problème les conditions initiales suivantes,

$$\Psi_0(0) = A, \quad \Psi_{N+1}(0) = A, \quad \Psi_j(0) = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.18)$$

Les figures (2.8) présentent le résultat de simulations numériques du système (2.17) associé aux conditions initiales (2.18) avec un choix de $N = 3$ guides constituant le réseau, et donc de cinq guides au total.

Le système étant parfaitement symétrique, le comportement dans les guides 0 et $N + 1$, 1 et $N - 1$ est identique. On observe un phénomène d'échange de puissance entre les guides, car une diminution d'amplitude dans les fibres maîtres (courbe rouge) entraîne une augmentation d'amplitude dans les autres fibres et vice-versa. On remarque également l'envergure des amplitudes des fibres pour une amplitude A différente. En effet, sur la figure (2.8) en haut, on est en-dessous du seuil de supratransmission, et sur celle du bas, on est au-dessus du seuil.

Le passage du seuil a pour conséquence d'entraîner le *siphonnage* par le réseau, de l'énergie lumineuse contenue dans les guides d'ondes maîtres latéraux. Il y a donc un comportement tout à fait différent du réseau pour un choix différent de l'amplitude d'entrée A . La première simulation, figure (2.8) en haut, montre un flux lumineux à l'intérieur du réseau du type *évanescent* et la seconde, un flux lumineux très intense. Le passage d'un état évanescent à un état intense se fait par le biais du seuil de supratransmission A_s .

3.4 Détecteur de lumière bistable

On propose de montrer que ce dispositif permet de détecter un signal lumineux très faible. Pour cela, on injecte dans les fibres maîtres un flux lumineux dont l'amplitude est la plus proche possible du seuil de supratransmission A_s . En fait, plus on est proche, plus le système sera sensible. Il faut toutefois veiller à rester sous le seuil. La détection se fait dans la fibre centrale du réseau, ce qui correspond, pour les simulations numériques, à la donnée de l'amplitude du mode de la fibre centrale $\Psi_{n=2}(0) = a$. La figure (2.9) présente le résultat de simulations numériques du système (2.17) associé aux conditions initiales,

$$\Psi_0(0) = A, \quad \Psi_1(0) = 0, \quad \Psi_2(0) = a, \quad \Psi_3(0) = 0, \quad \Psi_4(0) = A. \quad (2.19)$$

Ces simulations représentent le réseau, vu du dessus, en régime stationnaire, pour une longueur $z = 11.87$. En effet, le modèle ne tient nullement compte du temps. Cela signifie que, sur un dispositif réel, on obtiendrait ces images après une période de transition qui est le temps de réponse du milieu.

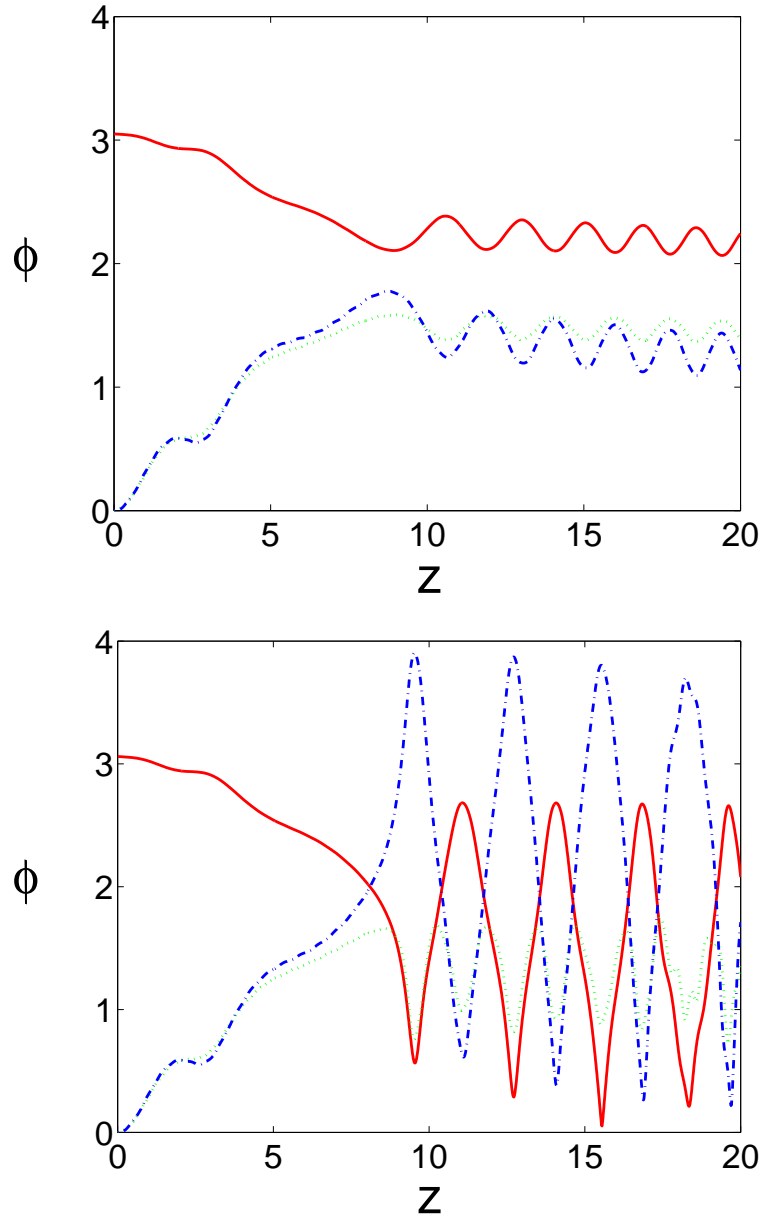


FIG. 2.8 – Tracé des amplitudes des champs en fonction de z pour une amplitude de $A = 3.05$ (en haut) et $A = 3.06$ (en bas), injectée dans les guides d'ondes maîtres, obtenu par simulations numériques du système (2.15) associé aux conditions initiales (2.16) avec $N = 3\Omega = 0.5Q = Q_0 = 4$ et $\gamma = \gamma_0 = 0.005$. Les courbes rouge, bleu (traits et points) et verte (pointillé) représentent respectivement l'amplitude dans les guides d'ondes maîtres, l'amplitude dans le guide d'ondes central, et l'amplitude dans les guides 1 et 3.

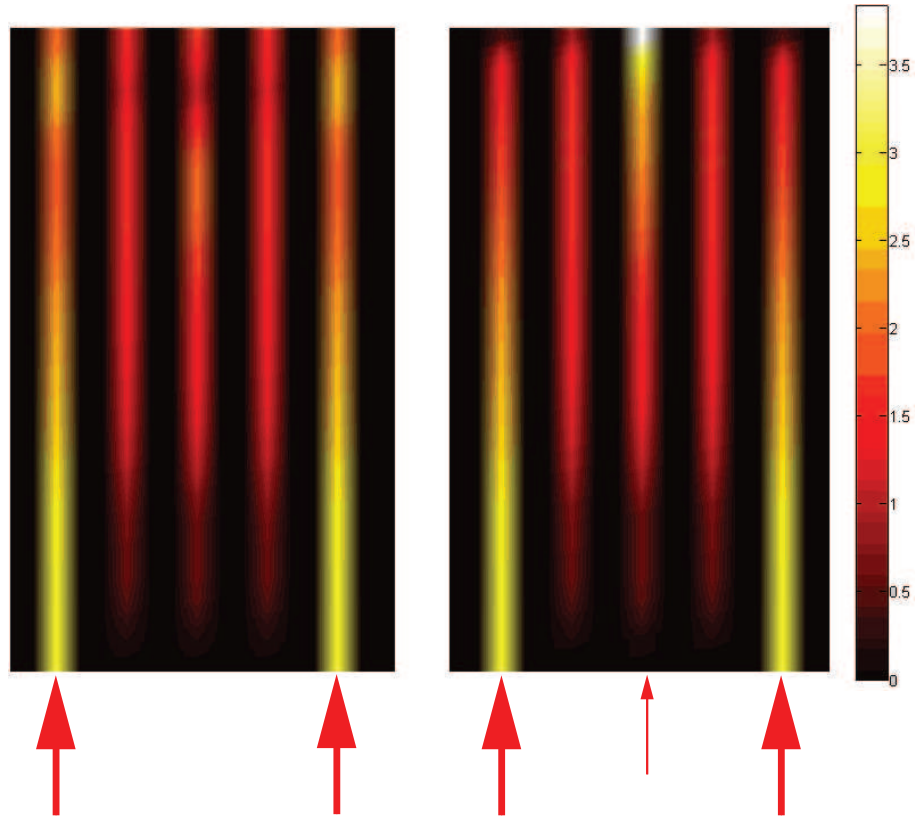


FIG. 2.9 – Flux d'intensité le long des guides d'ondes avec les paramètres $A = 3.0559$, $z = 11.87$, $\Omega = 0.5$, $Q = Q_0 = 4$, $\gamma = \gamma_0 = 0.005$. A gauche, le réseau ne reçoit aucun signal d'entrée. A droite, le guide central du réseau reçoit un flux d'amplitude $a = 0.003$. Les flèches rouges symbolise l'injection de radiation.

La détection se fait pour un signal environ 1000 fois plus faible que le flux envoyé dans les fibres maîtres. Il faut noter la différence drastique de flux sortant entre le réseau de droite et celui de gauche. L'amplitude de sortie centrale du réseau de gauche est de 1.14 contre 3.87 dans celui de droite. Le système a donc bifurqué d'un état de faible amplitude vers un état plus intense, sous l'influence d'un très faible signal lumineux.

4 Les états stationnaires

Le système présente un comportement de bistabilité, que l'on souhaite décrire à l'aide de solutions stationnaires, comme on l'a fait auparavant pour SG.

La limite continue de notre modèle est obtenue de (2.17) pour

$$y = j\sqrt{\frac{1}{Q}}, \quad \Psi_j(z) = \psi(y, z), \quad (2.20)$$

ce qui nous donne NLS continue,

$$i\psi_z + \psi_{yy} + |\psi|^2\psi = V\psi. \quad (2.21)$$

La dimension y dans l'équation (2.21) n'est pas la dimension physique du système de l'expression (2.2). Les conditions de bords qui représentent le flux injecté sont prises constantes, soit

$$\psi(0, z) = \psi(L, z) = A. \quad (2.22)$$

Dans le modèle discret précédent, l'amplitude de la lumière diminuait, au cours de sa propagation dans les guides d'ondes, à cause de l'atténuation. Cependant, si le couplage Q_0 entre les guides maîtres et le réseau, et l'amortissement γ_0 des fibres maîtres, ne sont pas trop grands, l'intensité lumineuse décroît faiblement le long de z et les conditions de bords (2.22) sont acceptables en comparaison avec le modèle discret (2.15). Les solutions stationnaires du problème sont obtenues en choisissant une solution à valeur réelle, dépendant uniquement de y , soit $\psi(y, z) = \psi(y)$ solution de

$$\psi_{yy} + \psi^3 = V\psi, \quad \psi(0) = \psi(L) = A. \quad (2.23)$$

Ces solutions sont données en termes de fonctions elliptiques de Jacobi, comme cela a été développé dans [20] et appliqué dans [21], pour obtenir un effet tunnel nonlinéaire, dans un réseau de guides d'ondes couplés, avec un comportement de focalisation et de défocalisation de la nonlinéarité. Il existe ici trois solutions stationnaires dont le détail est donné en annexe (p.113 en notant $\Omega = 0$ et $y_0 = L/2$),

$$\psi_1 = B \cdot \text{cn}[\sigma_1(y - L/2), k_1], \quad B^2 > 2V \quad (2.24)$$

$$\psi_2 = B \cdot \text{dn}[\sigma_2(y - L/2), k_2], \quad B^2 \in [V, 2V] \quad (2.25)$$

$$\psi_3 = \frac{B}{\text{dn}[\sigma_3(y - L/2), k_3]}, \quad B^2 < V. \quad (2.26)$$

où

$$\sigma_1^2 = B^2 - V, \quad k_1^2 = \frac{B^2}{2(B^2 - V)}, \quad (2.27)$$

$$\sigma_2^2 = \frac{B^2}{2}, \quad k_2^2 = \frac{2(B^2 - V)}{B^2}, \quad (2.28)$$

$$\sigma_3^2 = \frac{2V - B^2}{2}, \quad k_3^2 = \frac{2(V - B^2)}{2V - B^2}. \quad (2.29)$$

B représente l'amplitude au milieu du réseau en $y = L/2$. On trace, en figure (2.10) l'amplitude de sortie centrale $B = \psi(L/2)$ du réseau en fonction de l'amplitude $A = \psi(0) = \psi(L)$ dans les guides maîtres (conditions de bords (2.22)) grâce aux solutions (2.24), (2.25) et (2.26). On a également indiqué le résultat de simu-

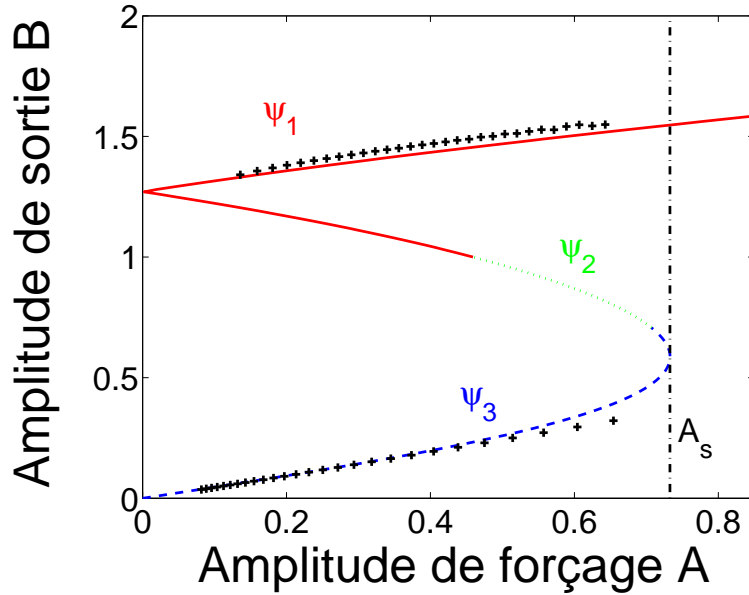


FIG. 2.10 – Diagramme d'hystérésis de bistabilité issu des solutions analytiques stationnaires (2.24), (2.25) et (2.26). Les croix représentent les simulations numériques du système (2.15) pour différentes valeurs d'amplitude d'entrée a . Les paramètres utilisés sont $\Omega = 0.5$, $L = 4$, $N = 18$, $Q = 20$, $Q_0 = 0.05$, $\gamma = 0.02$, $\gamma_0 = 0.002$.

lations numériques du système (2.17), obtenues en suivant pas à pas l'évolution

de l'amplitude $\Psi_{N/2}$ dans le milieu du réseau, en fonction de l'amplitude Ψ_0 dans les guides d'ondes maîtres. Ensuite, il suffit d'inverser les données pour obtenir $\Psi_{N/2}$ fonction de Ψ_0 . La solution ψ_3 permet de calculer le seuil de supratransmission A_s en calculant l'extremum de $\psi_3(0)$ qui est une fonction de l'amplitude B

$$\left. \frac{\partial \psi_3(0)}{\partial B} \right|_{B=B_s} = 0 \quad (2.30)$$

et donc

$$A_s = \psi_3(0)|_{B=B_s}. \quad (2.31)$$

Le couplage Q_0 entre les guides maîtres et le réseau est établi de façon adiabatique, pour ne pas brusquer le système. Les simulations numériques sont obtenues en deux étapes. Tout d'abord, on choisit d'envoyer comme condition initiale $\Psi_0 = \Psi_{N+1} = A < A_s$ dans les guides maîtres. Ensuite, on suit la propagation du flux lumineux dans les guides maîtres, et, quand le couplage avec le réseau est établi, on peut suivre la lente décroissance de l'amplitude $A(z)$ dans les fibres maîtres et relever, en même temps, l'amplitude $B(z)$ dans le centre du réseau. Le résultat obtenu correspond aux croix sur le graphique. On voit, très nettement que le système se bloque sur la solution analytique ψ_3 issue du modèle continu stationnaire. Ensuite, si on prend une amplitude $A > A_s$, et que l'on réalise le même suivi, le système se bloque alors sur la fonction analytique ψ_1 .

5 Conclusion

Les simulations, ainsi que l'étude analytique, permettent ainsi de comprendre la bistabilité dans un réseau de guides d'ondes nonlinéaires. L'amplitude initiale des flux, dans les guides maîtres, joue alors le rôle de conditions de bords, pour le modèle continu, valable si le couplage entre le réseau et l'amortissement dans les fibres maîtres est assez faible. Le système est capable de détecter un très faible signal lumineux, faisant ainsi bifurquer le système, d'un état de faible intensité de sortie, vers un état d'intense intensité de sortie et est donc *un réseau de guides d'ondes nonlinéaires bistable, détecteur de lumière*.

A Annexe A : Solutions stationnaires NLS

On rappelle l'équation de NLS

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + |\Psi|^2 \Psi = V \Psi. \quad (1)$$

On regarde les états stationnaires en z on pose donc $\Psi = \psi e^{-i\Omega z}$ et NLS devient

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + |\psi|^2 \psi = (V - \Omega) \psi. \quad (2)$$

On cherche maintenant les solutions à valeurs réelles de

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \psi^3 = \kappa \psi, \quad \kappa = V - \Omega. \quad (3)$$

Il existe un point pour lequel on a

$$\psi(y_0) = B, \quad \psi_y(y_0) = 0. \quad (4)$$

On multiplie (3) par ψ_y et on intègre entre y_0 et y

$$\int_{y_0}^y \psi_y \psi_{yy} dy + \int_{y_0}^y \psi_y \psi^3 dy = \kappa \int_{y_0}^y \psi_y \psi dy. \quad (5)$$

On effectue un changement de variables

$$\int_{\psi_y(y_0)=0}^{\psi_y} d(\psi_y)^2 + \frac{1}{2} \int_{\psi(y'_0)=B}^{\psi} d(\psi)^4 = \kappa \int_{\psi(y_0)=B}^{\psi} d(\psi)^2. \quad (6)$$

On obtient finalement l'équation type des fonctions elliptiques de Jacobi

$$\psi_y^2 = \frac{1}{2} (B^2 - \psi^2)(\psi^2 + B^2 - 2\kappa). \quad (7)$$

Il existe deux solutions pour lesquelles on a $\psi(y_0) = B > \psi(y)$.

$$\psi_1 = B \cdot \text{cn}[\sigma(y - y_0), k], \quad \sigma^2 = B^2 - \kappa, \quad k^2 = \frac{B^2}{2(B^2 - \kappa)}, \quad (8)$$

$$\psi_2 = B \cdot \text{dn}[\sigma(y - y_0), k], \quad \sigma^2 = \frac{B^2}{2}, \quad k^2 = \frac{2(B^2 - \kappa)}{B^2}, \quad (9)$$

et une, pour laquelle on a $\psi(y_0) = B < \psi(y)$

$$\psi_3 = \frac{B}{\text{dn}[\sigma(y - y_0), k]}, \quad \sigma^2 = \frac{2\kappa - B^2}{2}, \quad k^2 = \frac{2(\kappa - B^2)}{2\kappa - B^2}. \quad (10)$$

Solution $\psi_1 : B^2 \geq 2\kappa$

D'après les tables d'intégrales [22], on a

$$\text{cn}^{-1}(z, k) = \int_z^1 \frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2)(1+k^2(t^2-1))}}, \quad 0 \leq z < 1, \quad (11)$$

$$\text{dn}^{-1}(z, k) = \int_z^1 \frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-1+k^2)}}, \quad 1-k^2 \leq z < 1, \quad (12)$$

$$\frac{1}{\text{dn}^{-1}(z, k)} = \int_1^z \frac{\partial t}{\sqrt{(t^2-1)(1-(1-k^2)t^2)}}, \quad \frac{1}{1-k^2} \geq z > 1. \quad (13)$$

On écrit (7) sous la forme

$$\psi_y = B\sqrt{B^2 - \kappa} \sqrt{\left(1 - \frac{\psi^2}{B^2}\right) \left(1 + \frac{B^2}{2B^2 - 2\kappa} \left(\frac{\psi^2}{B^2} - 1\right)\right)}. \quad (14)$$

On intègre en y et y_0

$$\int_y^{y_0} \sqrt{B^2 - \kappa} \partial y = \int_{\psi(y)/B}^{\psi(y_0)/B} \frac{\partial(\psi/B)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\psi^2}{B^2}\right) \left(1 + \frac{B^2}{2B^2 - 2\kappa} \left(\frac{\psi^2}{B^2} - 1\right)\right)}}. \quad (15)$$

Il vient d'après (12)

$$\psi = B \cdot \text{cn}[\sigma(y - y_0), k], \quad k^2 = \frac{B^2}{2B^2 - 2\kappa}, \quad \sigma^2 = B^2 - \kappa, \quad (16)$$

où $k^2 \leq 1$, impose $B^2 \geq 2\kappa$. De (12) on obtient les relations suivantes

$$B^2 = 2\sigma^2 k^2, \quad \sigma^2 = \frac{\kappa}{2k^2 - 1}. \quad (17)$$

La condition $\sigma^2 \geq 0$, donne $k^2 > \frac{1}{2}$ pour $\kappa < 0$ et $\frac{1}{2} < k^2 \leq 1$ pour $\kappa > 0$.

Solution $\psi_2 : \kappa < B^2 \leq 2\kappa$

On écrit (7) sous la forme

$$\psi_y = \frac{B^2}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(1 - \frac{\psi^2}{B^2}\right) \left(\frac{\psi^2}{B^2} - 1 + \frac{2(B^2 - \kappa)}{B^2}\right)}. \quad (18)$$

On intègre en y et y_0

$$\int_y^{y_0} \frac{B}{\sqrt{2}} \partial y = \int_{\psi(y)/B}^{\psi(y_0)/B} \frac{\partial(\psi/B)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\psi^2}{B^2}\right) \left(\frac{\psi^2}{B^2} - 1 + \frac{2(B^2 - \kappa)}{B^2}\right)}}. \quad (19)$$

Il vient d'après (13)

$$\psi = B \cdot \text{dn}[\sigma(y - y_0), k], \quad k^2 = \frac{2(B^2 - \kappa)}{B^2}, \quad \sigma^2 = \frac{B^2}{2}, \quad (20)$$

où $0 \leq k^2 \leq 1$, impose $\kappa < B^2 \leq 2\kappa$. De 12 on obtient

$$\sigma^2 = \frac{\kappa}{2 - k^2}. \quad (21)$$

La condition $\sigma^2 \geq 0$, impose $\kappa > 0$.

Solution $\psi_3 : \kappa > B^2$

On écrit (7) sous la forme

$$\psi_y = B \sqrt{\kappa - \frac{B^2}{2}} \sqrt{\left(\frac{\psi^2}{B^2} - 1\right) \left(1 - \left(1 - \frac{\kappa - B^2}{\kappa - \frac{B^2}{2}}\right) \frac{\psi^2}{B^2}\right)}. \quad (22)$$

On intègre en y et y_0

$$\int_{\psi(y_0)/B}^{\psi(y)} \frac{\partial(\psi/B)}{\sqrt{\left(\frac{\psi^2}{B^2} - 1\right) \left(1 - \left(1 - \frac{\kappa - B^2}{\kappa - \frac{B^2}{2}}\right) \frac{\psi^2}{B^2}\right)}} = \sqrt{\kappa - \frac{B^2}{2}} \int_{y_0}^y \partial y. \quad (23)$$

Il vient d'après (13)

$$\psi(y) = \frac{B}{\text{dn}[\sigma(y - y_0), k]}, \quad k^2 = \frac{\kappa - B^2}{\kappa - \frac{B^2}{2}}, \quad \sigma^2 = \kappa - \frac{B^2}{2}, \quad (24)$$

où $0 \leq k^2$, impose $\kappa > B^2$. De (12) on obtient

$$B^2 = 2\sigma^2(1 - k^2), \quad \sigma_1^2 = \frac{\kappa}{2 - k^2}. \quad (25)$$

La condition $\sigma^2 \geq 0$ impose $\kappa > 0$.

Bibliographie

- [1] A. YARIV, *Optical Electronics*, Saunders College Pub. fourth ed. Orlando FL (1991) .
- [2] Y.S. KIVSHAR ET G.P. AGRAWALL, *Optical Solitons : From Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press, San Diego, CA (2003).
- [3] H.G. WINFUL, J.H. MARBURGER ET E. GARMIRE, *Appl Phys Lett*, **35**, 379 (1979).
- [4] A.B. ACEVES ET S. WABNITZ, *Phys Lett A*, **14**, 37 (1989).
- [5] D.N. CHRISTODOULIDES ET R.I. JOSEPH, *Phys Rev Lett*, **62**, 1746 (1989).
- [6] N.D. SANKEY, D.F. PRELEWITZ ET T.G. BROWN, *Appl Phys Lett*, **60**, 1427 (1992).
- [7] D.N. CHRISTODOULIDES ET R.I. JOSEPH, *Optics Lett*, **13**, 794 (1988).
- [8] T. PERTSCH, T. ZENTGRAF, U. PESCHEL, A. BRAUER ET F. LEDERER, *Phys Rev Lett*, **88**, 093901 (2002).
- [9] H.S. EISENBERG, Y. SILBERBERG, R. MORANDOTTI, A.R. BOYD ET J.S. AITCHISON, *Phys Rev Lett*, **81**, 3383 (1998).
- [10] R. MORANDOTTI, H.S. EISENBERG, Y. SILBERBERG, M. SOREL ET J.S. AITCHISON, *Phys Rev Lett*, **86**, 3296 (2001).
- [11] D. MANDELIK, H.S. EISENBERG, Y. SILBERBERG, R. MORANDOTTI ET J.S. AITCHISON, *Phys Rev Lett*, **90**, 053902 (2003).
- [12] D. MANDELIK, R. MORANDOTTI, J.S. AITCHISON, Y. SILBERBERG, *Phys Rev Lett*, **92**, 093904 (2004).
- [13] A.A. SUKHORUKOV, D. NESHEV, W. KROLIKOWSKI ET Y.S. KIVSHAR, *Phys Rev Lett*, **92**, 093901 (2004).
- [14] J.W. FLEISCHER ET AL., *Nature (London)*, **422**, 147 (2003).
- [15] J.W. FLEISCHER ET AL., *Phys Rev Lett*, **90**, 093901 (2004).
- [16] R. KHOMERIKI, *Phys Rev Lett*, **92**, 063905 (2004).
- [17] F. GENIET ET J. LEON, *Phys Rev Lett*, **89**, 134102 (2002); *J Phys Cond Matt*, **15**, 2933 (2003).
- [18] R. KHOMERIKI ET J. LEON, *Phys Rev Lett*, **94**, 243902 (2005).

- [19] M.J. ABLOWITZ AND Z.H. MUSSLIMANI, *Physica D*, **184**, 276 (2003).
- [20] L.D. CARR, K.W. MAHMUD ET W.P. REINHARDT, *Phys Rev A*, **64**, 033603 (2001).
- [21] J. LEON, *Phys Rev E*, **70**,056604 (2004).
- [22] P.F. BYRD ET M.D. FRIEDMAN, *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists*, Springer (Berlin 1954)

Chapitre 3

Transmission par bistabilité nonlinéaire

1 Introduction

Une question intéressante est de savoir ce qui se passe dans la limite $N \rightarrow 1$ quand le réseau se réduit à un seul guide d'ondes, afin de se rapprocher des *composants optiques*. Si l'on utilise le modèle discret traité précédemment, on perd de l'information sur les effets de diffraction transverse, qui sont pourtant effectifs si l'on tient compte de la direction transverse y . On étudie, par conséquent dans ce chapitre, la version continue du réseau de guides d'ondes, dessinée en figure (3.1), et qui se compose de trois guides d'ondes plans couplés, d'indices différents.

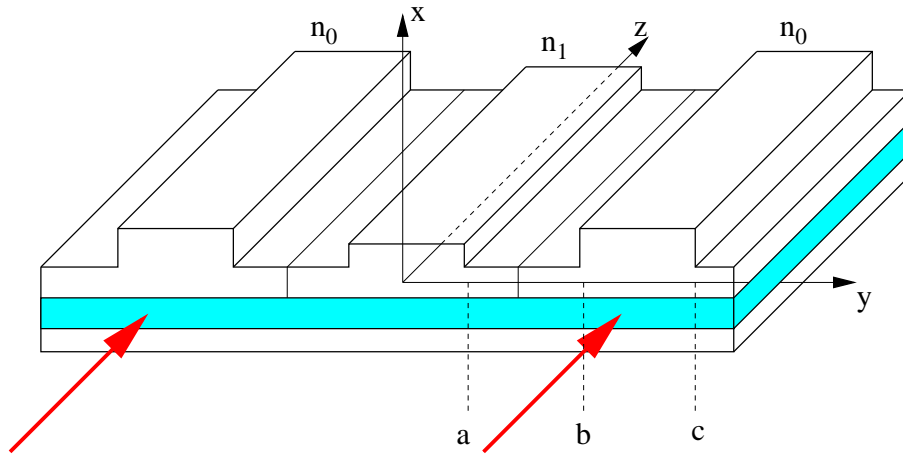


FIG. 3.1 – Coupleur de trois guides d'ondes planaires. La direction de propagation est z , la modulation transverse travaille dans la direction y .

2 Le modèle

2.1 Considérations générales

On considère notre système où la variation de l'indice linéaire ne s'opère que dans la direction y . On suppose que le champ électrique est monochromatique de fréquence ω , polarisé et homogène dans la direction x , à savoir, le champ transverse électrique (T.E) suivant

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} \left(E(y, z) e^{-i\omega t} + c.c. \right), \quad (3.1)$$

où $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}$ est le vecteur unitaire de la coordonnée x . On rappelle l'équation d'Helmoltz nonlinéaire (1.13)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot E + \frac{\omega^2}{c^2} \left(n^2(y) + 3\chi^{(3)}(y) |E|^2 \right) E = 0, \quad (3.2)$$

valable pour un milieu non magnétique, sans charge libre et en assumant une réponse instantanée du milieu Kerr (susceptibilité nonlinéaire $\chi^{(3)}$). L'indice optique n et la susceptibilité nonlinéaire $\chi^{(3)}$ dépendent de la direction y pour décrire notre milieu inhomogène. On donne une solution de l'équation d'Helmoltz linéaire dans la base des modes linéaires guidés $\mathcal{E}_k(y, z)$ définis par

$$\mathcal{E}_k(y, z) = A(y) e^{ikz}, \quad A_{yy} = \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2(y) \right] A, \quad (3.3)$$

où k est le nombre d'ondes gouverné par la propagation le long de z . L'amplitude $A(y)$ est le mode guidé dans la direction transverse y . C'est le mode propre de la solution du problème spectral, dans le potentiel généré par la variation de l'indice. Dans le cas d'une *gravure peu profonde*, c'est-à-dire pour de petites variations d'amplitude de l'indice $n(y)$ autour d'une valeur de référence n_0 , on définit un petit paramètre d'échelle (appelé ϵ^2) par

$$\frac{\omega^2}{c^2} [n_0^2 - n^2(y)] = \epsilon^2 V'(y). \quad (3.4)$$

Ainsi l'équation différentielle (3.3) pour le mode guidé $A(y)$, indique que la variable y devient une *variable lente* échelonnée par ϵ . De même, la variation en z , en référence au nombre d'ondes $k_0 = \omega n_0 / c$ se produira naturellement pour de bas modes en énergie, comme ϵ^2 en échelle de z , en accord avec la phase

$$kz = [k_0 + \mathcal{O}(\epsilon^2)]z. \quad (3.5)$$

2.2 Modulation nonlinéaire

On regarde maintenant la méthode de développement en série asymptotique selon [1]. Le petit paramètre ϵ , introduit précédemment, sert à définir une repré-

sensation multi-échelle du champ par les variables lentes

$$y = \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \cdots, \quad z = z_0 + \epsilon z_1 + \epsilon^2 z_2 + \cdots, \quad (3.6)$$

et par son développement

$$E(y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i E_i(y_1, \cdots, z_0, z_1, \cdots), \quad (3.7)$$

$$E_i = \sum_{j=1}^{\infty} U_{ij}(y_1, \cdots, z_1, \cdots) e^{ijk_0 z_0}.$$

Cela signifie que l'on restreint notre recherche à un champ lentement variable dans la direction transverse (pas de variable y_0). On souhaite aussi obtenir que les amplitudes U_{ij} ne dépendent pas de z_1 pour les raisons (3.5).

En considérant que les termes nonlinéaires E^3 provenant de E_1 , agissent uniquement sur la première et troisième harmonique, on peut simplifier, sans perdre de généralités, en annulant les puissances paires, c'est-à-dire $E_{2l} = 0$. L'équation (3.2) peut alors être développée en puissance de ϵ (détail des calculs en annexe (p.132))

$$(\epsilon^1) : \quad L_0 E_1 = 0, \quad (3.8)$$

$$(\epsilon^2) : \quad L_1 E_1 = 0, \quad (3.9)$$

$$(\epsilon^3) : \quad L_0 E_3 = -L_2 E_1 - N_3 E_1, \quad (3.10)$$

avec la définition des opérateurs suivants

$$L_0 = \partial_{z_0}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2, \quad (3.11)$$

$$L_1 = 2\partial_{z_0}\partial_{z_1}, \quad (3.12)$$

$$L_2 = \partial_{y_1}^2 + \partial_{z_1}^2 + 2\partial_{z_0}\partial_{z_2} - V', \quad (3.13)$$

$$N_3 = 3\frac{\omega^2}{c^2} \chi |E_1|^2, \quad (3.14)$$

où le potentiel échelonné V' est défini en (3.4).

Avec la définition (3.7), l'équation (3.8) est valable pour $U_{1l} = 0$ pour tout $l > 1$, et l'équation (3.9) donne alors

$$\partial U_{11} / \partial z_1 = 0. \quad (3.15)$$

On requiert, par la suite, qu'il n'y ait pas de termes séculaires produits dans l'équation (3.10), ce qui donne

$$2ik_0 \frac{\partial U_{11}}{\partial z_2} + \frac{\partial^2 U_{11}}{\partial y_1^2} - V' U_{11} + 3\chi \frac{\omega^2}{c^2} |U_{11}|^2 U_{11} = 0. \quad (3.16)$$

Cette équation est invariante par la transformation inverse vers les dimensions physiques, à savoir

$$\epsilon y_1 \rightarrow y, \quad \epsilon^2 z_2 \rightarrow z, \quad \epsilon^2 V' \rightarrow V(y), \quad \epsilon U_{11}(y_1, z_2) \rightarrow \Psi(y, z), \quad (3.17)$$

et donc, (3.16) devient

$$2ik_0 \Psi_z + \Psi_{yy} + \Gamma |\Psi|^2 \Psi = V(y)\Psi, \quad (3.18)$$

avec les définitions suivantes

$$V(y) = \frac{\omega^2}{c^2} [n_0^2 - n(y)^2], \quad \Gamma = 3\chi \frac{\omega^2}{c^2}, \quad k_0 = \omega \frac{n_0}{c}. \quad (3.19)$$

On rappelle que le champ électrique est obtenu à partir de la solution Ψ par

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} \Psi(y, z) e^{i(k_0 z - \omega t)} + c.c. + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (3.20)$$

où ϵ échelonne la variation de l'indice par rapport à la valeur n_0 .

3 Solutions fondamentales

L'évolution nonlinéaire (3.18) est maintenant étudiée dans le contexte particulier de variation de l'indice correspondant à la figure (3.1), qui se traduit par un potentiel $V(y)$ et un facteur nonlinéaire $\Gamma(y)$, constant par morceau. Le milieu constituant le guide d'ondes central possède, bien sûr, des propriétés nonlinéaires. Afin de simplifier le problème dans la recherche des solutions pour décrire le dispositif, on choisit que les deux guides d'ondes maîtres latéraux soient linéaires. On peut imaginer que le guide central soit un milieu photoréfractif, dont on contrôle la nonlinéarité grâce à l'application d'un champ électrique externe constant [2, 3, 4].

3.1 Problèmes aux valeurs propres

On considère le dispositif dessiné figure (3.1) et on étudie ses propriétés intrinsèques de bistabilité. Pour un choix judicieux des paramètres (variations d'indice, longueurs de séparations, dimensions), le forçage par les guides d'ondes latéraux résulte approximativement des conditions de bords en $y = -a$ et $y = a$ pour l'enveloppe Ψ du champ à l'intérieur de la fibre centrale.

Le nombre d'ondes k_0 définit les modes propres du guide d'ondes plan d'indice n_0 , avec une dimension transverse y infinie. Dans le cas où la dimension suivant y

est finie, les variations d'indices vont générer une variation δk_0 du nombre d'ondes k_0 . On peut alors considérer une modulation de l'enveloppe $\Psi(y, z)$ de la forme

$$\Psi(y, z) = \Phi(y) e^{-i(\delta k_0)z}, \quad (3.21)$$

avec la supposition que $\delta k_0 \sim \epsilon^2$. L'amplitude stationnaire $\Phi(y)$ résout alors le problème suivant aux valeurs propres nonlinéaires

$$\Phi_{yy} + [\beta^2 - V(y)] \Phi = -\Gamma |\Phi|^2 \Phi, \quad (3.22)$$

où le paramètre spectral

$$\beta^2 = 2k_0 \cdot \delta k_0 \equiv \delta k_0^2, \quad (3.23)$$

mesure la variation d'énergie. On note que, par construction, β est de l'ordre de ϵ^2 . Dans le cas linéaire $\Gamma = 0$, on retrouve les modes guidés (3.3) avec

$$\Phi(y) = A(y), \quad k^2 = k_0^2 - \beta^2 \sim (k_0 - \delta k_0)^2. \quad (3.24)$$

Le profil d'indices qui correspond à la figure (3.1) est tracé sur la figure (3.2), avec son potentiel résultant $V(y)$.

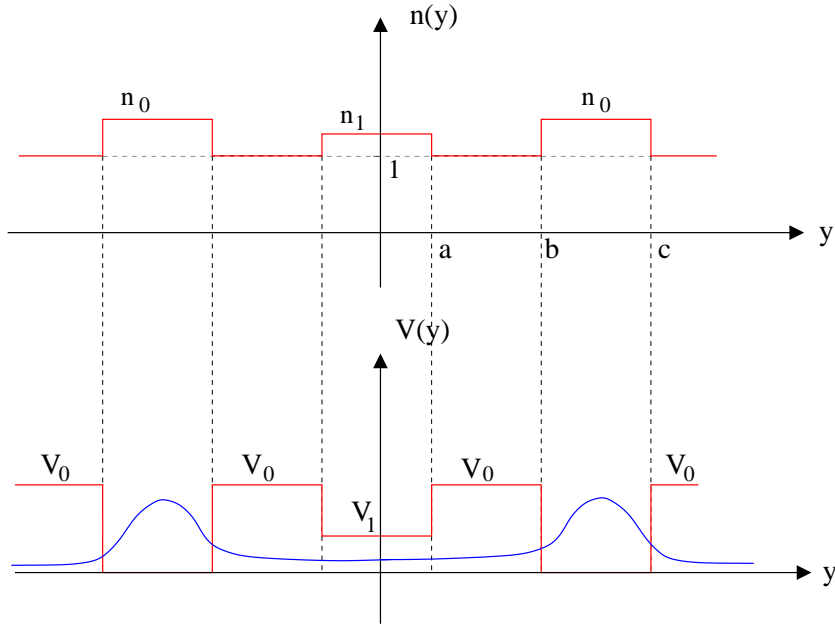


FIG. 3.2 – Profil d'indices $n(y)$ et son potentiel relatif $V(y)$. Un exemple de mode propre est schématisé en bleu sur la figure inférieure, c'est l'amplitude initiale $\Phi(y, 0)$ utilisée pour les simulations numériques.

On définit les constantes fondamentales

$$V_0 = \frac{\omega^2}{c^2} [n_0^2 - 1], \quad V_1 = \frac{\omega^2}{c^2} [n_0^2 - n_1^2], \quad (3.25)$$

qui proviennent de la définition (3.19) avec le choix d'indice n_1 pour la fibre centrale, n_0 pour les fibres latérales et $n = 1$ pour le vide entre les fibres (air). En accord avec les particularités du problème physique, le facteur nonlinéaire est donc inexistant en dehors de la fibre centrale et on définit donc

$$|y| < a : \Gamma(y) = \Gamma_1, \quad |y| > a : \Gamma(y) = 0. \quad (3.26)$$

Il est commode, pour la suite, de normaliser l'équation (3.16) en définissant $\psi = \sqrt{\Gamma_1} \Psi$ et $z = 2k_0 z'$, et l'on obtient NLS (en oubliant les primes)

$$i\psi_z + \psi_{yy} + |\psi|^2 \psi = V\psi. \quad (3.27)$$

En résumé, le système à étudier s'écrit

$$y \in [-a, a] \quad i\psi_z + \psi_{yy} + |\psi|^2 \psi = V_1 \psi, \quad (3.28)$$

$$y \in [a, b] \cup [-b, -a] \quad i\psi_z + \psi_{yy} = V_0 \psi, \quad (3.29)$$

$$y \in [b, c] \cup [-c, -b] \quad i\psi_z + \psi_{yy} = 0, \quad (3.30)$$

$$y \in [c, \infty] \cup [-\infty, -c] \quad i\psi_z + \psi_{yy} = V_0 \psi. \quad (3.31)$$

En accord avec (3.21), on cherche les solutions stationnaires à *valeurs réelles* sous la forme

$$\psi(y, z) = \phi(y) e^{-i\beta^2 z}, \quad (3.32)$$

et le système ci-dessus se résume alors au problème à valeurs propres suivant

$$y \in [0, a] \quad \phi_{yy} + \phi^3 = \lambda_1 \phi, \quad \lambda_1 = V_1 - \beta^2, \quad (3.33)$$

$$y \in [a, b] \quad \phi_{yy} = \lambda_0 \phi, \quad \lambda_0 = V_0 - \beta^2, \quad (3.34)$$

$$y \in [b, c] \quad \phi_{yy} = \lambda_2 \phi, \quad \lambda_2 = -\beta^2, \quad (3.35)$$

$$y \in [c, \infty] \quad \phi_{yy} = \lambda_0 \phi, \quad \lambda_0 = V_0 - \beta^2, \quad (3.36)$$

où l'on s'est restreint à l'étude sur $y > 0$, en raison de la symétrie du problème.

4 États propres nonlinéaires

On détermine maintenant, à partir du problème spectral, les conditions initiales pour l'équation de NLS (3.27) qui sont des états propres nonlinéaires spécifiques. Ceux-ci sont donnés en termes de fonctions elliptiques de Jacobi.

Il est clair que le signe de chaque constante λ_j est déterminant pour la nature de ces solutions. On s'intéresse au cas particulier où le guide d'ondes central ($y \in [-a, a]$) ne peut propager les modes guidés, provenant des guides d'ondes latéraux pilotes. Cela se produit uniquement si $V_1 > \beta^2$. Le choix d'un mode β particulier, qui a pour conséquence d'entraîner un λ_j négatif, signifie, qu'une

onde avec ce mode, ne peut se propager linéairement dans un guide d'onde. Par conséquent, on considère maintenant les conditions sur les signes λ_j suivant

$$\lambda_0 > 0, \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0. \quad (3.37)$$

On excite le système en établissant un mode guidé stationnaire dans les guides d'ondes latéraux,

$$y \in [b, c] : \phi(y) = B_{\text{in}} \cos(\beta(y - y_2)), \quad (3.38)$$

où le maximum d'amplitude de cette enveloppe définit *l'amplitude d'entrée* du faisceau pilote. L'annexe (p.113) donne le détail des calculs des trois solutions fondamentales de (3.27) pour $y \in [-a, a]$

$$\phi^{(1)}(y) = B \operatorname{cn}[\kappa(y - y_0), \mu], \quad \kappa^2 = \frac{\lambda_1}{2\mu^2 - 1}, \quad B^2 = 2\kappa^2\mu^2, \quad (3.39)$$

$$\phi^{(2)}(y) = B \operatorname{dn}[\kappa(y - y_0), \mu], \quad \kappa^2 = \frac{\lambda_1}{2 - \mu^2}, \quad B^2 = 2\kappa^2, \quad (3.40)$$

$$\phi^{(3)}(y) = \frac{B}{\operatorname{dn}[\kappa(y - y_0), \mu]}, \quad \kappa^2 = \frac{\lambda_1}{2 - \mu^2}, \quad B^2 = 2\kappa^2(1 - \mu^2), \quad (3.41)$$

exprimées en termes de fonctions elliptiques de Jacobi d'argument $\mu \leq 1$. Les quantités B, κ et μ sont des paramètres soumis à des relations qui sont l'analogue nonlinéaire d'une relation de dispersion, et qui assure que les $\phi^{(j)}$ sont solutions de (3.27). La phase y_0 est un paramètre libre qui pourra être déterminé par les conditions de continuité et les conditions de bords. Ces solutions fondamentales constituent alors, pour chaque λ_1 donné (ou l'équivalent β^2), un jeu de familles de deux paramètres, B (l'amplitude) et y_0 (le centre).

Le jeu de solutions est complété avec les ondes évanescentes qui connectent les régions latérales au guide d'ondes central et aux milieux extérieurs. Ce sont des solutions des équations linéaires (3.34) et (3.36), à savoir

$$y \in [a, b] : \quad \phi(y) = \alpha_1 e^{-\sqrt{\lambda_0} y} + \alpha_2 e^{\sqrt{\lambda_0} y}, \quad (3.42)$$

$$y \in [c, \infty] : \quad \phi(y) = \delta_1 e^{-\sqrt{\lambda_0} y}, \quad (3.43)$$

où l'on requiert un comportement asymptotique évanescent quand $y \rightarrow \infty$. La solution $\phi(y)$ est maintenant soumise aux conditions de continuité

$$\phi(y - y_d^+) = \phi(y - y_d^-), \quad \phi_y(y - y_d^+) = \phi_y(y - y_d^-), \quad (3.44)$$

en chaque point de discontinuité y_d du potentiel ($y_d = a, b, c$). La première de ces conditions est la continuité du champ TE (charges libres), la seconde est la continuité de la composante \vec{H}_{\parallel} du champ magnétique (surface non-conductrice).

L'utilisation des conditions de continuité au point $y = a, b, c$ produit, pour la solution, un jeu de six relations pour la détermination des sept paramètres libres (B_{in} et y_2 pour le faisceau incident, B et y_0 pour la solution nonlinéaire, α_1, α_2 et δ_1 pour l'onde évanescente linéaire). Une relation de plus est imposée par la symétrie du problème ($y_0 = 0$), et on choisit le cas des solutions paires. Le paramètre B représente, alors, l'amplitude de la solution nonlinéaire, au centre du guide d'ondes central. Les sept paramètres, incluant l'amplitude B , sont complètement déterminés par le choix de la valeur propre β , qui représente le choix du mode guidé dans les guides d'ondes latéraux maîtres.

Il est plus facile, pour les simulations, de fixer l'amplitude d'entrée B_{in} de l'enveloppe injectée dans les régions $y \in [b, c] \cup [-c, -b]$. Les conditions de continuité donneront alors une valeur de β (éventuellement un jeu de valeurs possibles parmi lesquelles on prendra celle de plus basse énergie). L'amplitude B_{in} est alors le paramètre physique donnant le flux d'énergie injecté dans les guides d'ondes maîtres latéraux. En suivant cette approche, on peut augmenter progressivement l'amplitude B_{in} tout en observant la nature du flux de lumière qui émerge du guide d'ondes central, et évaluer alors son amplitude de sortie B_{out} . Les relations qui permettent de déterminer les sept paramètres de la solution sont toutes imbriquées les unes dans les autres et seule une résolution numérique est possible, afin de comparer les solutions analytiques stationnaires aux simulations numériques. (voir prochaine section).

On trace en figure (3.3), l'amplitude de sortie du guide d'ondes central $B = \phi(0)$, en fonction de l'amplitude au bord du milieu central $A = \phi(-a) = \phi(a)$, issues des trois solutions (3.39), (3.40) et (3.41).

Les solutions à dérivée négative sont instables et elles ne peuvent donc contribuer à la description des résultats des simulations numériques.

5 Simulations numériques

On propose, dans cette section, de décrire une situation physique réaliste où les radiations sont envoyées dans les guides d'ondes maîtres latéraux. On démontre que le problème, aux valeurs initiales correspondantes, génère un flux de lumière dont le comportement est celui décrit par les solutions stationnaires fondamentales décrites précédemment. En conséquence, le coupleur directionnel à trois fibres est un bon candidat comme appareil de détection de lumière bistable.

Éclairer localement la tranche avec un faisceau signifie, pour le modèle, de le compléter avec la condition initiale $\Psi(y, 0)$. On présente le résultat de simulations numériques du système d'équations (3.28-3.31), dans le potentiel tracé sur la figure (3.2) associé aux conditions initiales $\Psi(y, 0)$. On choisit, d'ailleurs, pour la compatibilité avec le schéma numérique, les valeurs asymptotiques de Neumann $\Psi_y(\pm\infty, z) = 0$. On réalise les simulations numériques avec une condition initiale qui modélise le flux injecté dans les guides maîtres latéraux. Afin de

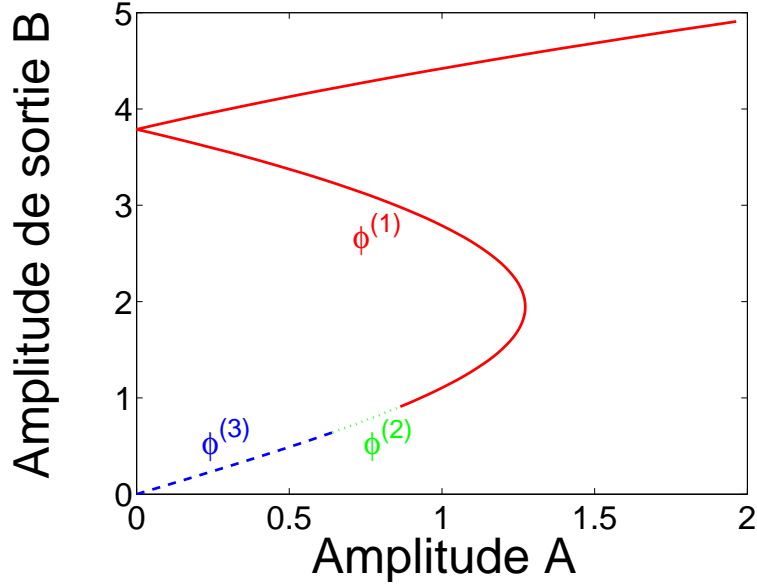


FIG. 3.3 – Tracé du diagramme d’hystérésis de bistabilité à partir des solutions analytiques stationnaires (3.39), (3.40) et (3.41). Les paramètres utilisés sont $V_1 = 2$ et $L = 2a = 1$.

réduire le bruit numérique, on démarre avec un mode propre exact du système linéaire associé, facilement calculable à l’aide des conditions de continuité (3.44) qui déterminent tous les paramètres et, en particulier, le mode propre β , pour la seule donnée du maximum d’amplitude d’entrée B_{in} dans les deux guides maîtres latéraux.

On présente en figures (3.4), les simulations numériques du système, observées dans la direction de propagation z , pour deux valeurs de B_{in} différentes.

Il est important de constater la différence de flux se propageant dans le guide d’ondes central. L’issue intéressante est alors de comparer le résultat des simulations numériques du modèle *dynamique* (3.28-3.31) aux solutions analytiques obtenues du modèle stationnaire (3.33-3.36). On donne la procédure pour la comparaison :

- Choisir une valeur donnée de z , qui représente la longueur de propagation.
- Mesurer la valeur actuelle du paramètre β par une analyse du signal dans la région $[a, b]$ où la propagation est linéaire.
- Évaluer approximativement la valeur du paramètre B , qui définit la solution $\phi^{(j)}(y)$ dans (3.33-3.36), en exigeant un assortiment de conditions de continuité en $y = a$.
- Varier doucement la valeur de B telle qu’elle se bloque sur une solution exacte, c’est-à-dire une solution qui obéit à toutes les conditions de continuité.

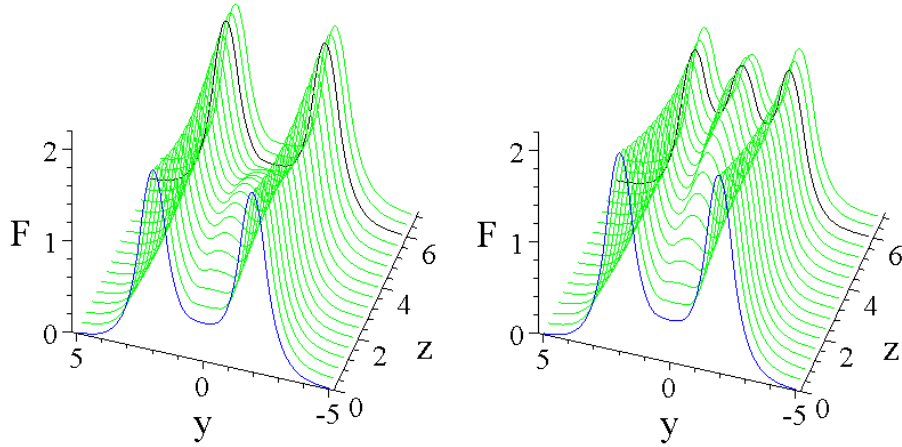


FIG. 3.4 – Gauche : Tracé de $F = |\Psi(y, z)|^2$ le long de z , provenant de la condition initiale $B_{in} = 1.4$. On observe $B_{out}^2 \approx 0.46$. Droite : Même situation, mais avec une amplitude initiale $B_{in} = 1.48$ ($B_{out}^2 \approx 3.25$). Les courbes bleues représentent le mode linéaire, choisi comme condition initiale pour les simulations. Les courbes noires sont les solutions utilisées pour la comparaison du modèle *dynamique* aux solutions analytiques stationnaires (3.28-3.31) sur les figures (3.5). Les paramètres sont $a = 0.5$, $b = 1.5$, $c = 2.5$, $V_0 = 2.5$ et $V_1 = 2$.

Par cette procédure numérique, on obtient les figures (3.5) où le résultat des simulations est comparé aux profils stationnaires exacts.

On note sur les figures (3.4), un régime d'oscillation du flux dans le milieu central. En fait, cette oscillation semble perpétuelle, comme on peut le voir sur la figure (3.6) haute, qui est le résultat de la même simulation numériques que sur la figure (3.4) droite, mais pour un z plus grand.

On souhaite, maintenant suivre l'évolution de l'amplitude du milieu central $B = \phi(0)$, en fonction de l'amplitude au bord du milieu central $B = \phi(0)$. Le résultat est tracé sur la figure (3.6), en comparaison avec les solutions analytiques stationnaires.

6 Conclusion

En considérant les effets de diffraction transverse, le modèle s'est enrichi, car on prend en compte le dispositif dans sa globalité, ainsi que le milieu dans lequel il baigne (air). Cependant, il devient moins flexible et il se produit un échange de flux permanent entre le guide central et les guides latéraux, ce qui entraîne une oscillation perpétuelle du flux entre le milieu central et les milieux latéraux.

L'ajout d'amortissement, soit dans le guide d'ondes central, soit dans les guides d'ondes maîtres latéraux, soit tout simplement dans tous le dispositif,

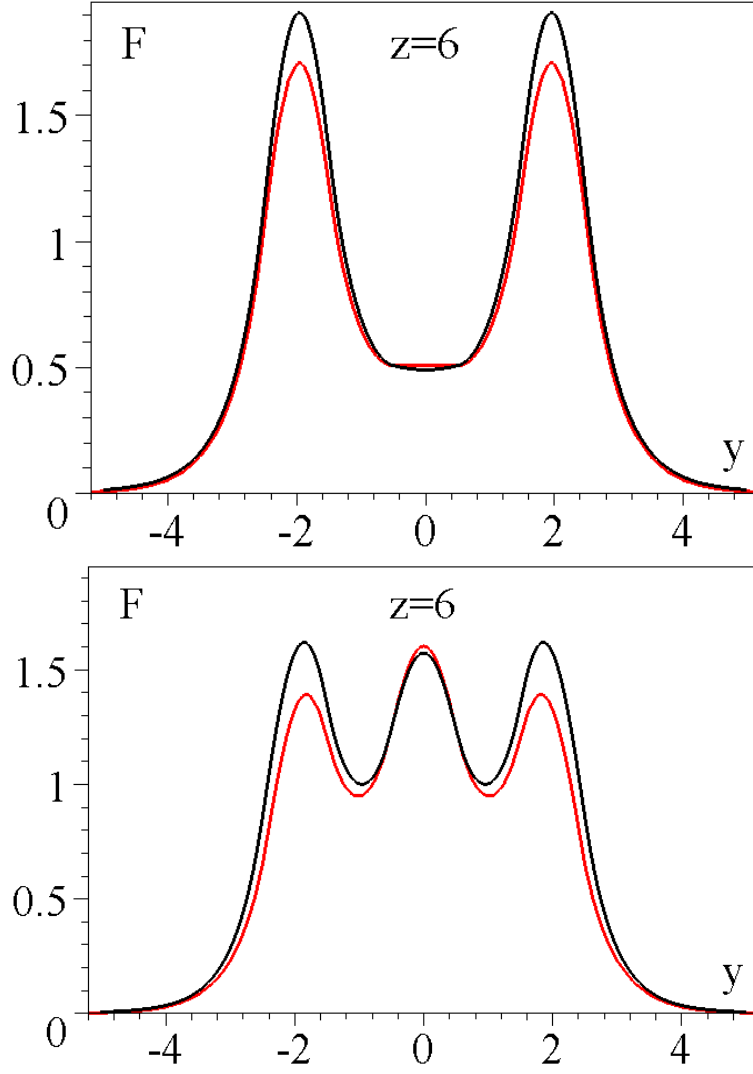


FIG. 3.5 – Comparaison des simulations numériques (courbes noires) de la figure (3.4), aux solutions analytiques stationnaires (courbes rouges) pour $z = 6$. Les paramètres sont $\beta = 1.19$ et $B = 0.467$ pour la figure du haut et $\beta = 1.20$ et $B = 1.254$ pour celle du bas.

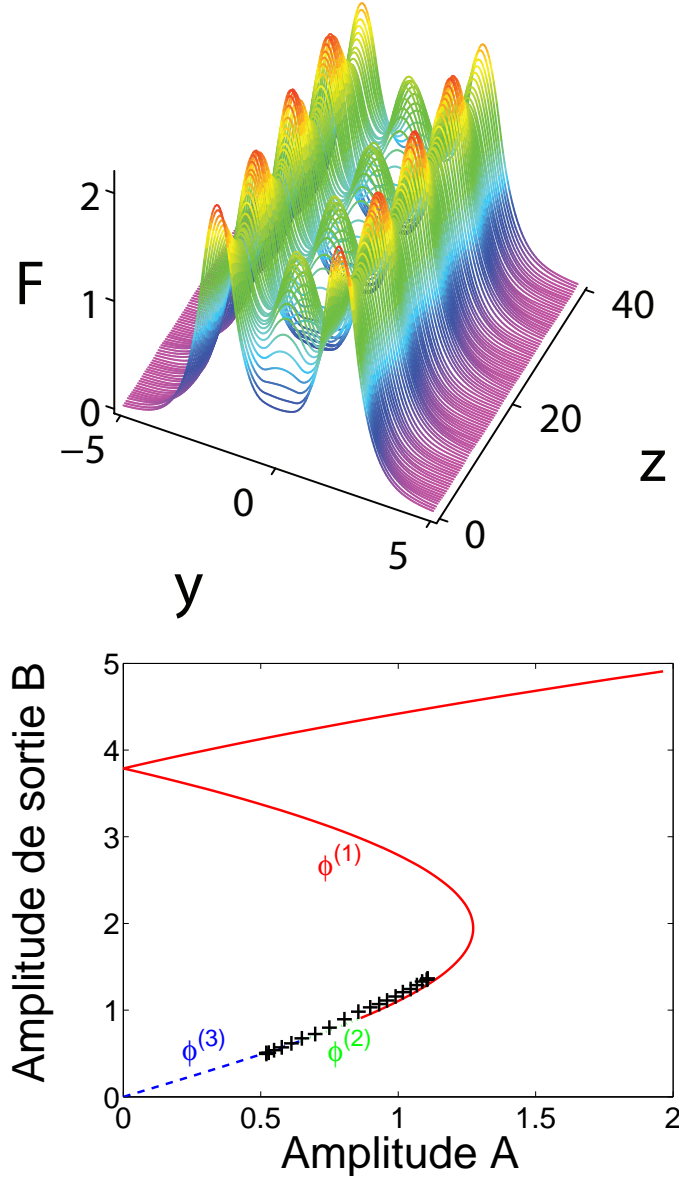


FIG. 3.6 – Haut : Tracé de $F = |\Psi(y, z)|^2$ le long de z , provenant de la condition initiale $B_{in} = 1.4$. Bas : Tracé du diagramme d'hystérésis de bistabilité à partir des solutions analytiques stationnaires (3.39), (3.40) et (3.41) en comparaison avec les simulations numériques (croix) du système d'équations (3.28- 3.31).

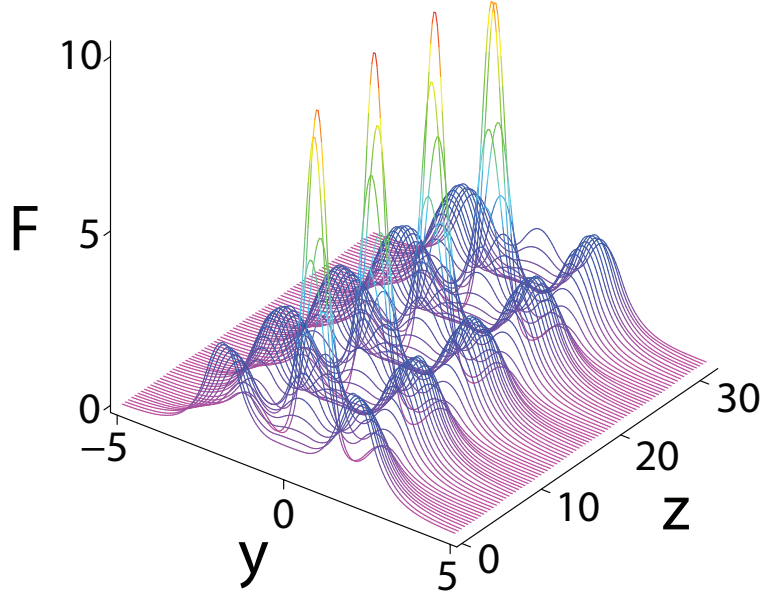


FIG. 3.7 – Tracé de $F = |\Psi(y, z)|^2$ le long de z , provenant de la condition initiale $B_{in} = 1.7$ et $B_{out}^2 \approx 3.25$.

ne permet pas selon nos simulations numériques de bloquer le système sur une solution stationnaire précise. Le flux central oscille toujours sur une palette de solutions décrit par la branche basse à dérivé positive de la figure (3.6) basse.

Le couplage entre les guides maîtres latéraux et le guide central est représenté ici par la distance les séparant, c'est-à-dire l'épaisseur de la couche d'air. Il semblerait donc que, pour diminuer les effets d'échanges, une plus grande séparation soit nécessaire, mais rapidement, il devient difficile d'observer un flux dans le guide central. Une des conséquences immédiate de l'échange perpétuel de flux, est l'impossibilité de faire bifurquer le système, par la détection d'un très faible signal, dans le guide central, car il est absorbé par tout le système. Cependant, un surplus de signal envoyé dans un des deux guides d'ondes maîtres latéraux, peut provoquer un changement d'état pour le milieu central.

Les simulations numériques semblent en accord avec le modèle des solutions analytiques stationnaires, pour les faibles amplitudes. En effet, pour de plus grandes amplitudes, les solutions stationnaires ne fournissent pas une description précise. Un tel résultat est tracé en figure (3.7). La description continu d'un coupleur à trois guides d'ondes, ne permet pas de décrire les oscillations que l'on peut observer dans le guide d'ondes central, mais on suspecte que cet effet puisse être un régime d'oscillations Josephson.

A Annexe A : Modulation nonlinéaire

On rappelle l'équation de Helmholtz (3.2)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \cdot E + \frac{\omega^2}{c^2} \left(n^2(y) + 3\chi(y) |E|^2\right) E = 0, \quad (1)$$

le potentiel échelonné (3.4)

$$\frac{\omega^2}{c^2} [n_0^2 - n^2(y)] = \epsilon^2 V'(y), \quad (2)$$

ainsi que les représentation multi-échelle du champ par les variables lentes

$$y = \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \epsilon^3 y_3 + \epsilon^4 y_4 + \dots, \quad (3)$$

$$z = z_0 + \epsilon z_1 + \epsilon^2 z_2 + \epsilon^3 z_3 + \epsilon^4 z_4 + \dots,$$

et par son développement

$$E(y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i E_i(y_1, \dots, z_0, z_1, \dots), \quad (4)$$

$$E_i = \sum_{j=1}^{\infty} U_{ij}(y_1, \dots, z_1, \dots) e^{ijk_0 z_0}. \quad (5)$$

En tenant compte des extensions (3), les opérateurs de dérivation $\partial/\partial y$ et $\partial/\partial z$ doivent être considéré comme les expansions respective suivantes

$$\frac{\partial}{\partial y} = \epsilon \frac{\partial}{\partial y_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial y_3} + \epsilon^4 \frac{\partial}{\partial y_4} + \dots, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial z_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial z_3} + \epsilon^4 \frac{\partial}{\partial z_4} + \dots,$$

et ses opérateurs dérivées seconde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + 2\epsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} + \epsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + 2\epsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_3} + \dots, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial z_1} + \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + 2\epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial z_2} + 2\epsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial z_3} + 2\epsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} + \epsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \\ &\quad + 2\epsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial z_4} + 2\epsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_3} + \dots. \end{aligned} \quad (7)$$

On substitue (4) dans (1)

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2 \right) \left(\epsilon E_1 + \epsilon^2 E_2 + \epsilon^3 E_3 + \epsilon^4 E_4 + \epsilon^5 E_5 + \dots \right) \\
& \quad + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial z_1} \left(\epsilon E_1 + \epsilon^2 E_2 + \epsilon^3 E_3 + \epsilon^4 E_4 + \dots \right) \\
& + \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial z_2} + \frac{3\omega^2 \chi(y)}{c^2} |E_1|^2 - V' \right) \left(\epsilon E_1 + \epsilon^2 E_2 + \epsilon^3 E_3 + \dots \right) \\
& \quad + \epsilon^3 \left(2 \frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial z_3} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} + \frac{3\omega^2 \chi(y)}{c^2} \left(E_1 \bar{E}_2 + E_2 \bar{E}_1 \right) \right) \\
& \quad \quad \left(\epsilon E_1 + \epsilon^2 E_2 + \dots \right) \\
& + \epsilon^4 \left(\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_3} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial z_4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_3} + \frac{3\omega^2 \chi(y)}{c^2} \left(E_1 \bar{E}_3 + |E_2|^2 \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. + E_3 \bar{E}_1 \right) \right) \left(\epsilon E_1 + \dots \right) = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Ordre ϵ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2 \right) E_1 = 0, \tag{9}$$

avec la définition $E_1 = \sum_{j=1}^{\infty} U_{1j} e^{ijk_0 z_0}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} n_0^2 - j^2 k_0^2 \right) U_{1j} e^{ijk_0 z_0} \right] = 0. \tag{10}$$

Or le nombre d'onde $k_0 = \frac{\omega n_0}{c}$, impose $U_{1l} = 0$ pour tout $l > 1$.

On pose

$$L_0 = \partial_{z_0}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2, \tag{11}$$

et donc (9) s'écrit

$$L_0 E_1 = 0. \tag{12}$$

Ordre ϵ^2

$$2 \frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial z_1} E_1 + \left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2 \right) E_2 = 0. \tag{13}$$

En considérant que les termes nonlinéaires E^3 provenant de E_1 , agissent uniquement sur la première et troisième harmonique, on peut simplifier, sans perdre de généralités, en annulant les puissances paires, c'est à dire $E_{2l} = 0$. On obtient alors

$$2ik_0 \frac{\partial}{\partial z_1} U_{11} e^{ik_0 z_0} = 0, \quad (14)$$

et donc U_{11} est indépendant de z_1 comme prévu.

On pose maintenant

$$L_1 = 2\partial_{z_0}\partial_{z_1}, \quad (15)$$

et donc (13) s'écrit

$$L_1 E_1 = 0. \quad (16)$$

Ordre ϵ^3

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial z_2} + \frac{3\omega^2 \chi(y)}{c^2} |E_1|^2 - V' \right) E_1 + \left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2 \right) E_3 = 0, \quad (17)$$

avec la définition $E_3 = \sum_{j=1}^{\infty} U_{3j} e^{ijk_0 z_0}$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + 2ik_0 \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{3\omega^2 \chi(y)}{c^2} |U_{11}|^2 - V' \right) U_{11} e^{ik_0 z_0} \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} n_0^2 - j^2 k_0^2 \right) U_{3j} e^{ijk_0 z_0} \right] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

On pose maintenant

$$L_2 = \partial_{y_1}^2 + \partial_{z_1}^2 + 2\partial_{z_0}\partial_{z_2} - V', \quad (19)$$

$$N_3 = 3\frac{\omega^2}{c^2} \chi |U_{11}|^2, \quad (20)$$

et donc (18) s'écrit

$$\sum_{p=1}^{\infty} L_0 U_{3j} e^{ijk_0 z_0} = -(L_2 + N_3) U_{11} e^{ik_0 z_0}. \quad (21)$$

Afin d'éviter les termes séculaires on impose $U_{3l} = 0$ pour tout $l > 1$ et comme $k_0 = \frac{\omega n_0}{c}$, on obtient l'équation (3.16), à savoir

$$2ik_0 \frac{\partial U_{11}}{\partial z_2} + \frac{\partial^2 U_{11}}{\partial y_1^2} + \frac{3\omega^2 \chi(y)}{c^2} |U_{11}|^2 U_{11} = V' U_{11}. \quad (22)$$

Ordre ϵ^4

$$\begin{aligned} & \left(2 \frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial z_3} + 2 \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \right) E_1 \\ & \quad + 2 \frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial z_1} E_3 \\ & + \left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2 \right) E_4 = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

avec la définition $E_4 = \sum_{j=1}^{\infty} U_{4j} e^{ijk_0 z_0}$

$$\begin{aligned} & \left(2ik_0 \frac{\partial}{\partial z_3} + 2 \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \right) U_{11} e^{ik_0 z_0} \\ & \quad + 2ik_0 \frac{\partial}{\partial z_1} U_{31} e^{ik_0 z_0} \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} n_0^2 - j^2 k_0^2 \right) U_{4j} e^{ijk_0 z_0} \right] = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Afin d'éviter les termes séculaires on impose $U_{4l} = 0$ pour tout $l > 1$. U_{31} ne dépend pas de z_1 et comme $k_0 = \frac{\omega n_0}{c}$, on obtient

$$2ik_0 \frac{\partial U_{11}}{\partial z_3} + 2 \frac{\partial^2 U_{11}}{\partial y_1 \partial y_2} = 0. \quad (25)$$

Ordre ϵ^5

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_3} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial z_4} + \frac{3\omega^2 \chi(y)}{c^2} (E_1 \bar{E}_3 + E_3 \bar{E}_1) \right) E_1 \\ & \quad + \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial z_2} + \frac{3\omega^2 \chi(y)}{c^2} |E_1|^2 - V' \right) E_3 \\ & \quad + 2 \frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial z_1} E_4 \\ & \quad + \left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2 \right) E_5 = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

avec la définition $E_5 = \sum_{j=1}^{\infty} U_{5j} e^{ijk_0 z_0}$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_3} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + 2ik_0 \frac{\partial}{\partial z_4} + \frac{3\omega^2 \chi(y)}{c^2} (U_{11} \bar{U}_{31} + U_{31} \bar{U}_{11}) \right) U_{11} e^{ik_0 z_0} \\
& + \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + 2ik_0 \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{3\omega^2 \chi(y)}{c^2} |U_{11}|^2 - V' \right) U_{31} e^{ik_0 z_0} \\
& + 2ik_0 \frac{\partial}{\partial z_1} U_{41} e^{ik_0 z_0} \\
& + \sum_{p=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} n_0^2 - j^2 k_0^2 \right) U_{5j} e^{ijk_0 z_0} \right] = 0. \quad (27)
\end{aligned}$$

Afin d'éviter les termes séculaires on impose $U_{5l} = 0$ pour tout $l > 1$. U_{41} ne dépend pas de z_1 et comme $k_0 = \frac{\omega n_0}{c}$, on obtient

$$2ik_0 \frac{\partial U_{31}}{\partial z_2} + \frac{\partial^2 U_{31}}{\partial y_1^2} + \frac{3\omega^2 \chi(y)}{c^2} |U_{31}|^2 U_{31} = V' U_{31}, \quad (28)$$

$$2ik_0 \frac{\partial U_{11}}{\partial z_4} + \frac{\partial^2 U_{11}}{\partial y_2^2} + 2 \frac{\partial^2 U_{11}}{\partial y_1 \partial y_3} + \frac{\partial^2 U_{11}}{\partial z_2^2} + \frac{3\omega^2 \chi(y)}{c^2} (U_{11} \bar{U}_{31} + U_{31} \bar{U}_{11}) = 0. \quad (29)$$

Bibliographie

- [1] A. JEFFREY ET T. KAWAHARA, *Asymptotic methods in nonlinear wave theory*, Pitman (London 1982).
- [2] N. K. EFREMIDIS, S. SEARS, D. N. CHRISTODOULIDES, J. W. FLEISCHER ET M. SEGEV, *Phys Rev E*, **66**, 046602 (2002).
- [3] M. SEGEV, G.C. VALLEY, B. CROSIANI, P.D. PORTO ET A. YARIV, *Phys Rev Lett*, **73**, 3211 (1994).
- [4] D.N. CHRISTODOULIDES ET M.I. CARVALHO, *J Opt Soc Am B*, **12**, 1628 (1995).
- [5] P.F. BYRD ET M.D. FRIEDMAN, *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists*, Springer Berlin (1954)

RÉSUMÉ

On étudie, dans cette thèse, la diffusion d'ondes dans différents milieux nonlinéaires possédant une bande interdite naturelle. On montre, en particulier, l'existence d'un comportement de bistabilité dans les milieux régis, soit par l'équation de sine-Gordon (chaîne de pendules courte, réseaux de jonctions Josephson, double couches à effet Hall quantique), soit par l'équation de Schrödinger nonlinéaire (milieu Kerr et milieu de Bragg), dans les cas discrets et continus. Ces différents milieux sont soumis à des conditions aux bords périodiques, dont la fréquence est prise dans la bande interdite et avec une amplitude déterminant l'état de stabilité du système. En effet, pour une amplitude suffisante (supratransmission), le milieu n'est plus réfléchissant et absorbe de l'énergie, faisant passer le signal de sortie d'un état d'amplitude évanescence vers un état de très grande amplitude. On donne, par ailleurs, une description analytique complète de la bistabilité qui permet de comprendre les différents états stationnaires observés dans ces milieux et de prédire le passage d'un état à un autre.

TITLE

Supratransmission and bistability in nonlinear media with a photonic and electronic forbidden band gap

ABSTRACT

We study wave scattering in different nonlinear media possessing a natural forbidden band gap. In particular, we show the existence of a bistable behavior in media governed by the sine-Gordon equation (short pendula chain, Josephson junction array, quantum Hall bilayer), or the nonlinear Schrödinger equation (Kerr and Bragg media), in discrete and continuous models. These different media are submitted to periodic boundary conditions with a frequency in the forbidden band gap and an amplitude that determines their stability states. Indeed, for a sufficient amplitude (supratransmission), the medium switches from reflector to transmitter, hence allowing the output signal to jump from evanescent to large values. We give a complete analytical description of the bistability that allows to understand the different stationary states observed and to predict the switch of one state to the other.

DISCIPLINE

Constituants élémentaires

MOTS-CLÉS

Supratransmission	Solitons de gap	Hystérésis de la bistabilité
Diffusion nonlinéaire	Sine-Gordon	Schrödinger nonlinéaire
Milieu Kerr	Milieu de Bragg	Réseau de guides d'ondes
Réseau de jonctions Josephson	Double couches	Indice périodique
Problème de conditions aux bords	Analyse multiéchelle	États stationnaires nonlinéaires

Laboratoire de Physique Théorique et d'Astroparticules (CC 070)

CNRS-IN2P3-UMR5207-GDR PhoNoMi2 3073

Université Montpellier II

Place Eugène Bataillon

34095 Montpellier Cedex 5